


DO PIZZOFALCONE



MANUEL
DES ASPIRANTS
A
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

IMPRIMERIE DE GUIRAUDET ET JOUAUST,
Rue Saint-Honoré, 315.

MANUEL
DES ASPIRANTS
A
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

CONTENANT

UN TRÈS GRAND NOMBRE DE QUESTIONS

RECUEILLIES DANS LES DERNIERS EXAMENS DE CONCOURS,

AVEC LES SOLUTIONS;



PAR M. GEORGES RITT,

AUTEUR DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, D'ALGÈBRE, ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

Paris,

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, N. 12.

1839



Ce Manuel des Aspirants à l'Ecole Polytechnique n'est pas une encyclopédie des connaissances exigées par le programme du concours. L'auteur ne pouvait avoir la prétention de refaire les ouvrages très estimables qui ont été publiés sur ces matières, ni la pensée de les étreindre ou de les écourter pour les forcer à entrer dans le cadre d'un Manuel. L'ouvrage qu'il offre aux jeunes gens qui se destinent à l'Ecole Polytechnique a pour but spécial l'examen d'admission.

Le programme et le règlement, exposés en tête de l'ouvrage, déterminent d'une manière précise les conditions matérielles ou morales de l'admission au concours et à l'Ecole : ces actes officiels n'ont pas besoin de commentaires.

L'auteur développe dans la première partie les diverses matières exigées par le programme, en adressant aux aspirants quelques conseils sur la manière de se préparer aux épreuves de l'examen. Dans un but de prévoyance qui s'étend au delà de l'Ecole, il a cru devoir insister fortement sur la nécessité, pour

les aspirants, d'achever les études littéraires avant de se livrer à l'étude des sciences physiques et mathématiques.

La seconde partie est consacrée aux examens d'admission en général, et en particulier à l'examen oral ou écrit des mathématiques. Chaque examen oral renferme un même nombre de questions, combinées de manière que la force moyenne des examens reste à peu près la même. Les questions d'examen écrit ne sont autre chose que des exercices proposés aux aspirants.

Enfin la troisième et dernière partie du livre contient les solutions développées des principales questions d'examen. Dans l'intérêt des aspirants, et afin de leur laisser le mérite du travail, l'auteur a dû se borner à indiquer la marche des calculs et le résultat.

Ainsi, conseils sur les études préparatoires, sur la manière de subir l'examen oral ou écrit, et en particulier l'examen des mathématiques; questions d'examen oral et d'examen écrit; solutions des questions les plus difficiles : tel est, en résumé, le contenu de cet ouvrage, qui, indépendamment de son but spécial, peut servir de complément aux ouvrages classiques sur les mathématiques élémentaires et spéciales, et termine la série de recueils de problèmes que l'auteur a déjà publiés à l'usage des élèves des classes mathématiques.

L'auteur croit n'avoir rien négligé afin de rendre cet ouvrage utile autant que possible aux jeunes gens

qui se préparent à entrer à l'Ecole Polytechnique. Le choix des questions, dont la plupart ont été recueillies aux examens publics d'admission, et qui embrassent à peu près tout le programme, a été fait et disposé de manière que MM. les professeurs puissent varier à leur gré les énoncés dans les examens préparatoires qu'ils feront subir à leurs élèves.

L'auteur serait heureux d'avoir atteint le but qu'il s'est proposé en publiant ce livre d'utilité pratique. Il ne lui reste plus qu'à adresser aux jeunes aspirants à l'Ecole un dernier conseil, qui, par son importance et par sa gravité, domine tous les conseils spéciaux qu'il a cru devoir leur donner dans les diverses parties de son ouvrage : c'est de se préparer dignement, par un travail constant et assidu, par une conduite sage et régulière, par l'accomplissement, en un mot, de tous leurs devoirs, à la grande épreuve qui les attend, à l'Ecole Polytechnique d'abord, et ensuite dans tout le cours de leur vie, dont l'utilité ou l'éclat doivent rejaillir à la fois sur le gouvernement, qui compte sur leurs bons et loyaux services, sur le pays, qui les regarde d'avance comme l'élite de ses enfants.

Georges RITT.



INSTRUCTION

POUR L'ADMISSION

A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

EN 1838.

INSTITUTION DE L'ÉCOLE.

L'École royale Polytechnique, établie à Paris, est destinée spécialement à former des élèves pour les services

De l'artillerie de terre et de mer,

Du génie militaire et du génie maritime,

De la marine royale et des ingénieurs hydrographes,

Des ponts et chaussées et des mines,

Du corps royal d'état-major (partie de géodésie),

Des poudres et salpêtres,

De l'administration des tabacs,

Enfin pour les autres services publics qui exigeraient des connaissances étendues en physique et mathématiques, ou l'enseignement même de ces sciences.

La durée du cours d'instruction est de deux ans.

L'école pourra recevoir cent vingt élèves en 1839, mais il n'est pas probable qu'il puisse en être placé plus de quatre-vingts à quatre-vingt-cinq dans les services publics en 1840. Le gouvernement ne prend donc aucun engagement pour le placement, après les deux années d'études, des élèves qui seraient en sus du nombre des emplois vacants dans les services publics alimentés par l'École.

Les élèves qui ont satisfait aux examens de sortie ont le droit de choisir, suivant le rang de mérite qu'ils occupent sur la liste générale de classement dressée par le jury, et jusqu'à concurrence du nombre d'emplois disponibles, le service public où ils désirent entrer. Néanmoins ceux qui ont été admis à l'Ecole

comme candidats militaires par suite du bénéfice de l'article 4 de la loi du 14 avril 1832 ne peuvent être placés que dans l'armée, à moins qu'ils n'aient accompli le temps de service exigé par la loi du recrutement, et dans lequel est comprise la durée de leur séjour à l'École.

L'École est soumise au régime militaire.

Le prix de la pension est de 1,000 fr. et celui du trousseau de 5 à 600 fr.

Le devis des objets de trousseau est envoyé aux familles ou aux élèves avec les lettres de nomination. Les articles qui concernent la lingerie peuvent être fournis en nature.

Vingt-quatre places gratuites, susceptibles d'être partagées en demi-places, sont instituées en faveur des élèves dont les parents sont hors d'état de payer la pension et qui remplissent les conditions indiquées ci-après, au titre *Concession des places gratuites*. Elles sont distribuées, savoir :

8 par le ministre de l'intérieur,
4 par le ministre de la marine,
12 par le ministre de la guerre.

CONCOURS.

Nul n'est admis à l'École que par voie de concours.

Le concours est ouvert le 20 juillet, jour où les examens commencent à Paris.

Un avis, inséré dans le *Moniteur* et publié par MM. les préfets dans leurs départements, fait connaître, dans le courant de juillet, la désignation des villes affectées comme centres d'examen à chaque département et l'époque à laquelle MM. les examinateurs doivent être rendus dans chacune d'elles.

Nul ne peut être admis au concours s'il n'a préalablement justifié :

1° Qu'il est Français ou naturalisé ;

2° Qu'il a eu plus de seize ans et en comptait moins de vingt au 1er janvier de l'année courante.

Néanmoins, aux termes de l'article 4 de la loi du 14 avril 1832, les militaires des corps de l'armée sont admis à concourir

jusqu'à l'âge de vingt-cinq ans, pourvu qu'ils n'aient pas accompli cet âge avant le jour de l'examen ; mais ils ne peuvent obtenir de congé pour se livrer aux études préparatoires qu'après deux ans révolus de présence effective sous le drapeau.

Les candidats qui rempliront les conditions ci-dessus indiquées devront se faire inscrire, *avant le 10 juin*, à la préfecture du département où résident leurs familles. Nulle inscription ne sera admise après cette époque, aucune liste supplémentaire ne devant d'ailleurs être établie.

Ne sont dispensés de l'inscription que les élèves du collége royal militaire.

Les pièces à produire pour l'inscription sont :

1° L'acte de naissance du candidat, revêtu des formalités prescrites par la loi ;

2° Une déclaration d'un docteur en médecine ou en chirurgie, attaché à un hospice civil ou à un hôpital militaire, dûment légalisée, et constatant que le candidat a eu la petite-vérole ou qu'il a été vacciné ou inoculé, et qu'il n'a ni maladie contagieuse ni infirmité ;

3° La déclaration écrite du lieu d'examen choisi par le candidat, conformément aux dispositions ci-après énoncées.

Les candidats militaires doivent ajouter à ces pièces un certificat d'immatriculation, délivré par le conseil d'administration du corps, et visé par le général commandant la division. Ce certificat indiquera si le militaire est présent sous les drapeaux ou s'il est régulièrement absent de son corps. Dans ce dernier cas, le motif et la durée de l'absence devront y être mentionnés.

Les candidats militaires sont admis au concours dans le lieu de leur garnison, si c'est une ville d'examen, ou, dans le cas contraire, dans la ville d'examen la plus voisine. Les lieutenants généraux commandant les divisions militaires sont autorisés à leur délivrer, à cet effet, les permissions, dont la durée ne peut excéder le temps nécessaire au voyage et à l'examen.

Ceux de ces candidats, âgés de plus de 20 ans, qui ont concouru sans succès, ne peuvent être admis à se faire remplacer à leur corps que sur l'autorisation spéciale du ministre de la

guerre, et seulement après avoir servi activement pendant deux ans sous les drapeaux.

Les élèves du collége royal militaire ne peuvent être examinés qu'à La Flèche.

Tous les autres candidats ont la faculté de se faire examiner soit dans l'arrondissement d'examen où le domicile de leur famille est établi, soit dans celui où ils ont achevé leur instruction, pourvu qu'ils y aient étudié au moins une année; dans ce dernier cas ils devront justifier, lors de l'inscription, que cette année d'études a commencé au plus tard le 20 juillet de l'année précédente.

Ce choix fait, aucune demande tendant à obtenir la faculté de changer d'arrondissement ou d'époque d'examen ne sera admise, sous quelque prétexte que ce soit.

Dans chaque centre d'examen la voie du sort détermine dans quel ordre doivent être examinés les candidats.

L'examen pour l'École Polytechnique n'est valable, sous aucun prétexte, pour l'École de Saint-Cyr.

Les pièces fournies par les candidats qui ne seraient point admis à l'École Polytechnique seront renvoyées à la préfecture où l'inscription aura été effectuée.

PROGRAMME DES CONNAISSANCES EXIGÉES.

Les connaissances exigées pour l'admission à l'École Polytechnique sont :

1° L'arithmétique complète, comprenant la théorie des proportions, des progressions, des logarithmes, et l'usage des tables; l'exposition du système métrique ;

2° La géométrie élémentaire, comprenant les propriétés des triangles sphériques ;

3° L'algèbre, comprenant la résolution des équations des deux premiers degrés; celle des équations indéterminées du premier degré; la théorie des exposants fractionnaires et des exponentielles; la démonstration de la formule du binôme de Newton, dans le cas seulement des exposants entiers positifs; la composition générale des équations; la règle des signes de Descartes;

la détermination des racines commensurables, celle des racines égales; la résolution des équations numériques par apppoximation; l'élimination des inconnues entre deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues;

4° La trigonométrie rectiligne et l'usage des tables de sinns;

5° La statique, démontrée d'une manière synthétique, comprenant la composition et la décomposition des forces; la composition et l'équilibre des forces qui agissent dans un même plan suivant des directions quelconques; la composition et l'équilibre des forces parallèles; la détermination du centre de gravité du triangle et de la pyramide; l'équilibre des machines simples, le levier, la poulie, le plan incliné, le coin, le treuil, la vis et les moufles;

6° La discussion complète des lignes représentées par les équations du premier et du second degré à deux inconnues, et les propriétés principales des sections coniques;

7° Un exemple de résolutiou de triangle rectiligne sera proposé à chacun des candidats, pour constater qu'il sait se servir des tables de logarithmes; les calculs devront être faits avec des tables à sept décimales;

8° Les candidats traduiront, sous les yeux de l'examinateur, un morceau d'un auteur latin de la force de ceux qu'on explique en rhétorique, et traiteront par écrit, en français, un sujet de composition donné. Ils devront écrire d'une manière lisible, et orthographier correctement;

9° Ils copieront enfin une académie, en partie ombrée au crayon, qui leur sera présentée par l'examinateur;

10° Ils devront également posséder la pratique du lavis d'architecture.

Avant d'entrer à l'École, les élèves doivent avoir été exercés à construire, avec la règle et le compas, quelques problèmes de géométrie élémentaire et de géométrie descriptive.

Toutes ces parties du programme sont également obligatoires.

Les candidats ne sont examinés que sur les connaissances exigées par le programme : on a cependant égard aux connaissances que les candidats possèdent sur la physique, la chimie et la langue allemande.

Les candidats admis seront soumis, lors de leur arrivée à l'École, à de nouvelles épreuves, à l'effet de vérifier leurs connaissances en dessin et en littératures française et latine. En cas defrau dc reconnue pour les dessins et les compositions fournis au premier examen, l'élève sera renvoyé.

CONCESSIONS DES PLACES GRATUITES.

Nul ne peut obtenir une place gratuite ou demi-gratuite s'il ne fait partie des deux premiers tiers de la liste générale d'admission.

Les candidats qui, dénués de fortune, prétendraient à une des places gratuites ou demi-gratuites disponibles, doivent le faire connaître, *au moment de l'inscription*, par une demande adressée à celui des ministres de l'intérieur, de la marine ou de la guerre, *dans les attributions duquel rentrent les services qui motivent cette demande.* A cet effet, un état desdits services, émané du ministère auquel ils se rattachent, sera remis au préfet avec la demande, qui devra en outre être appuyée d'un relevé du rôle des contributions et d'un certificat délivré par le maire du lieu du domicile de la famille, énonçant exactement les moyens d'existence, le nombre d'enfants et les autres charges des parents.

Les demandes produites après le 10 juin ne seront point admises pour le concours aux places gratuites ou demi-gratuites.

CONDITIONS EXIGÉES POUR L'ENTRÉE A L'ÉCOLE.

Tout candidat nommé élève qui ne s'est pas présenté au commandant de l'École dans le délai qui sera fixé par sa lettre de nomination sera considéré comme démissionnaire. Les nominations seront d'ailleurs publiées par le *Moniteur*.

Les élèves, à leur arrivée à l'École, sont soumis à une visite, qui a pour objet de constater qu'ils n'ont aucune maladie ou infirmité qui les mettrait hors d'état de suivre les cours, ou qui les rendrait impropres aux services publics, dans le cas où ils s'y destineraient exclusivement.

Nul ne peut, d'ailleurs, être reçu à l'École s'il ne fournit immédiatement le trousseau, et ne remet au commandant une pro-

messe sous seing privé par laquelle ses parents ou répondants s'engagent à verser, dans la caisse de M. le receveur central du trésor public, le montant par trimestre et d'avance de la pension si l'élève est pensionnaire, ou de la demi-pension s'il a obtenu une demi-place gratuite. Cette promesse, qui doit être légalisée par le maire ou le sous-préfet, sera faite par l'élève lui-même s'il est majeur et s'il jouit de ses biens.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

(*Extrait du règlement sur les examens.*)

Il y aura deux lignes d'examen parcourues chacune par deux examinateurs; l'un et l'autre examineront les mêmes candidats.

Les examens se composent :

1° D'interrogations sur la totalité du programme des connaissances exigées;

2° De compositions en mathématiques, en littérature française et latine, et en dessin.

Un candidat qui renoncera ou ne se présentera pas à l'une des épreuves sera, par cela seul, exclu du concours.

L'examen oral sur la totalité du programme sera fait successivement par les deux examinateurs de chaque ligne.

Le premier examinateur présidera à la composition mathématique, et sera chargé, en outre, de la composition trigonométrique indiquée au programme.

Les compositions en littérature et en dessin se feront sous la direction du second examinateur.

Les sujets des compositions littéraires et mathématiques seront renfermés dans une enveloppe cachetée, que l'examinateur ouvrira en présence des candidats de chaque lieu d'examen, réunis pour subir l'épreuve exigée.

La durée de chaque examen oral sera au moins de trois quarts d'heure.

Il sera accordé au plus six heures pour la composition mathématique, et une heure pour la résolution du triangle; six heures pour les deux compositions littéraires, et cinq heures pour le dessin.

Les compositions mathématiques et littéraires seront écrites sur des feuilles à tête imprimée, fournies par l'administration de l'École et délivrées aux candidats par les examinateurs.

Chaque examinateur dressera une liste, sur laquelle seront classés, par ordre de mérite, tous les candidats qu'il aura examinés, même les inadmissibles, c'est-à-dire ceux qui, ayant subi toutes les épreuves, seront jugés par lui incapables de suivre les cours de l'École.

Le même rang ne pourra être occupé par deux candidats.

Deux commissaires nommés par le ministre jugeront et classeront, l'un les compositions mathématiques, l'autre les compositions littéraires.

Une commission composée de trois maîtres de dessin de l'École examinera et classera les dessins.

Les résultats de ces trois genres d'épreuves serviront au jury, avec les listes des examinateurs, pour établir le classement définitif.

ERRATA.

Avant de lire l'ouvrage, le lecteur est prié de corriger les fautes suivantes :

Page	*ligne*	*au lieu de*	*lisez*
24	7	en poser	exposer.
45	30	à s'habituer	de s'habituer.
54	16	demandée	demandé.
59	3	l'arc	l'axe.
70	14	perpendiculaires	perpendiculaire.
72	13	donné	divisible par 9.
74	5	dénominations	dénominateurs.
87	25	poutre	poulie.
112	3	ses tiers	ses deux tiers.
145	20	suppression	suspension.
267	25	$\frac{EF}{CE}$	$\frac{EF}{IE}$.
idem	26	A	I.
268	8 et 9	parallèles	parallèle.
338	14	$\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$.
365	17	$\frac{y'}{2}$	$\frac{y'}{A^3}$.

MANUEL DES ASPIRANTS

A

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



PREMIÈRE PARTIE.

CONSEILS AUX ASPIRANTS

SUR

LES ÉTUDES PRÉPARATOIRES.

D'après le programme, les connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique sont de trois sortes : connaissances mathématiques ; connaissances littéraires ; connaissances en dessin linéaire, dessin au crayon noir et lavis d'architecture. Chacune d'elles ne peut s'obtenir que par une instruction spéciale, que par des études préparatoires, sur lesquelles il ne sera pas sans utilité de donner quelques conseils aux aspirants.

ÉTUDES MATHÉMATIQUES.

Les études préparatoires concernant les mathématiques comprennent les matières enseignées dans les colléges royaux et communaux sous la dénomination de mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales; ou, plus particulièrement, l'arithmétique complète, la géométrie élémentaire, l'algèbre, la trigonométrie rectiligne, l'application de l'algèbre à la géométrie, les notions élémentaires de la géométrie descriptive, et enfin la statique. Chacun des cours de mathématiques élémentaires et spéciales dure ordinairement une année scolaire. Ainsi, après deux années d'études, un élève laborieux et intelligent peut être en état de se présenter au concours et d'être admis à l'École. Mais il ne faut pas se dissimuler que ces cas sont très rares, et il ne serait peut-être pas difficile d'en trouver la cause. Les jeunes gens qui se destinent à l'École polytechnique abandonnent trop tôt les études littéraires. Par suite d'un préjugé déplorable, qui fait regarder les études littéraires comme incompatibles avec les études scientifiques proprement dites, on quitte les classes d'humanité dès la troisième, et vers l'âge de 15 ou 16 ans, pour se livrer exclusivement à l'étude des mathématiques. Comment ne sait-on pas que l'étude des langues grecque et latine n'est qu'un moyen de développer l'intelligence, et que ce qu'il faut apporter surtout à l'étude des mathématiques, c'est une intelligence exercée, une habitude de raisonnement et de travail qui ne peut s'acquérir que par ce moyen ou par d'autres moyens analogues? Car, enfin, la grammaire comparée, l'histoire, la géographie, sont la base de l'éducation classique; et, quelques modifications que l'on veuille apporter aux études uni-

versitaires, il serait impossible d'imaginer un système d'instruction appropriée à la jeunesse qui ne renfermât les mêmes éléments. Sans doute la substitution d'une ou deux langues modernes aux langues de l'antiquité pourrait offrir quelques avantages pratiques; mais ne pourrait-on pas, en se servant des mêmes arguments qu'on a si souvent avancés, dire aussi que l'imitation des mœurs, des usages, des habitudes littéraires des peuples dont on étudierait la langue et la littérature, ne manquerait pas d'exercer une influence puissante sur l'esprit et le cœur de la jeunesse? Au lieu d'être Grec ou Romain, ne serait-on pas exposé à devenir Anglais, Allemand, Italien, etc.? Mais ce n'est pas le lieu de développer cet important sujet. Ici tout se réduit à cette question d'application immédiate : l'étude des mathématiques exige-t-elle de ceux qui veulent s'y livrer avec fruit une intelligence suffisamment développée? Les études universitaires contribuent puissamment au développement de l'intelligence. Suivez donc, et surtout achevez ces études : car c'est de leur achèvement complet que dépend principalement le résultat nécessaire à acquérir. Et, pour ne parler que d'une spécialité scolaire, comment l'élève pourra-t-il, sans le secours d'une logique exacte et sévère, tirer profit de l'enseignement mathématique, qui repose sur les principales formes du raisonnement. Or la logique, une des parties importantes du cours de philosophie, n'est enseignée qu'à la fin de toutes les études scolaires.

Comment ne prévoit-on pas les dangers d'un revers, en suivant une voie aussi peu raisonnable? Le candidat qui, après avoir abandonné les études classiques, a le malheur d'échouer aux examens de l'École polytechnique, a donc doublement manqué son éducation? On ne saurait trop prévenir les parents, et les jeunes gens eux-mêmes, des dangers de cette funeste direction donnée à leurs études. Nous ne doutons pas que les aspirants qui ont eu le bonheur, malgré ce désavantage d'une éducation classique incom-

plète ou négligée, d'être admis à l'École polytechnique, ne regrettent long-temps leur erreur, en se retrouvant plus tard dans un état d'infériorité par rapport à leurs collègues qui ont achevé d'une manière également satisfaisante leurs études littéraires et scientifiques. Cette différence doit se faire remarquer dans les travaux de comptes-rendus, de rapports, de projets, etc., qu'ils sont souvent appelés à adresser au gouvernement. Qu'on se pénètre bien surtout de cette vérité : une éducation négligée ne se répare jamais.

Un calcul bien simple peut mettre en état de se convaincre qu'il est très possible de suivre avec un succès égal les études littéraires et scientifiques. L'enfant qui commence à apprendre ses lettres à six ans au bout de deux ans peut commencer les études universitaires. En supposant qu'il n'entre au collége qu'en septième préparatoire, il lui faudra neuf ans pour achever toutes ses classes. Il pourra donc commencer à 17 ans son cours de mathématiques élémentaires : à 19 ans, il subira l'examen d'admission; s'il échoue, ce qui n'est pas probable, il a encore un an de travail avant d'avoir atteint l'âge auquel il ne peut plus être admis au concours. En supposant qu'il ne soit pas jugé admissible à l'École, il lui reste au moins une éducation assez complète sous beaucoup de rapports, et la possibilité de suivre utilement d'autres carrières. Nous avons adopté le calcul le plus large; mais nous sommes persuadé qu'il est facile d'avoir complété l'éducation littéraire et mathématique des colléges et de subir un premier examen dès l'âge de 18 ans. Quelles que soient les modifications que la méthode universitaire doive éprouver un jour, il n'est pas permis d'espérer que l'éducation puisse être terminée avant cet âge. Le temps est un élément nécessaire au développement complet de l'intelligence; on ne pourra jamais faire que l'aptitude la plus remarquable pour quelque branche que ce soit des connaissances hu-

maines tienne lieu de l'expérience et de la méditation.

Nous avons insisté long-temps sur cette question, qui nous a paru très grave, tant sous le rapport des intérêts véritables de la jeunesse que sous le rapport du bien public et de l'honneur de l'École. Il est nécessaire que le renom de l'École polytechnique ne perde pas dans l'opinion de la France et de l'Europe; et nous sommes convaincu que rien ne saurait y porter atteinte autant que l'abandon des études littéraires, qui développent à la fois l'intelligence, les sentiments moraux, le goût et l'imagination. Aussi, loin de diminuer l'importance des épreuves littéraires du concours, nous ne craignons pas d'exprimer le vœu que les aspirants à l'École polytechnique soient soumis, dans quelques années, à des conditions particulières de capacité, telles qu'un certificat d'études classiques complètes ou le diplôme de bachelier ès lettres.

Quoi qu'il en soit, un élève intelligent et habitué au travail peut réussir à entrer à l'École après deux ans d'études mathématiques. Mais, pour obtenir ce résultat, il est nécessaire non seulement que l'enseignement soit parfaitement conforme aux programmes de l'Université, mais encore que l'élève adopte un mode de travail qui rende cet enseignement fructueux pour lui-même.

D'après ces programmes pour l'enseignement des mathématiques, les matières se présentent dans l'ordre suivant : *Mathématiques élémentaires* (1re année), arithmétique; algèbre, jusqu'au binôme de Newton; géométrie élémentaire, trigonométrie.—*Mathématiques spéciales* (2e année), algèbre supérieure, application de l'algèbre à la géométrie, notions élémentaires de géométrie descriptive, statique.

Cet ordre est parfaitement entendu, eu égard à l'enchaînement des diverses parties qui se prêtent un mutuel secours. Nous croyons qu'il y aurait danger à le troubler : car on s'apercevrait bientôt des lacunes, et, l'in-

struction se faisant sans suite et sans direction constante, il en résulterait nécessairement dans les idées de l'élève une confusion qui ne manquerait pas de lui être fatale au jour de l'examen.

Quant à l'élève, son occupation journalière devra être de rédiger avec soin les leçons du professeur. C'est par cet exercice éminemment utile que l'élève s'appropriera en quelque sorte les idées du maître; il les analysera, les développera dans ses rédactions, qui lui offriront plus tard une immense facilité pour revoir tout le cours de mathématiques et se préparer avantageusement aux épreuves du concours.

Afin que ces rédactions soient exactes et complètes autant que possible, il n'oubliera pas de prendre des notes pendant la leçon du professeur, laquelle leçon devra être préparée et étudiée d'avance sur le livre classique adopté pour l'enseignement (1). Quoique les professeurs ne suivent pas à la lettre et pas à pas le livre qu'ils désignent à leurs élèves, ils en adoptent généralement l'ordre; et cette

---

(1) Les livres indiqués par les professeurs et choisis parmi les ouvrages autorisés par le conseil royal sont principalement :

Pour l'*Arithmétique* : les traités de MM. Lacroix, Reynaud, Bourdon.
— l'*Algèbre* : MM. Lacroix, Reynaud, Bourdon, Lefébure de Fourcy,
— la *Géométrie* : MM. Legendre, Lacroix, Vincent.
— la *Trigonométrie* : MM. Lacroix, Legendre, Reynaud, Bourdon, Lefébure de Fourcy.
— l'*Application de l'algèbre à la géométrie* : MM. Lacroix, Reynaud, Bourdon, Lefébure de Fourcy, Georges Ritt.
— la *Géométrie descriptive* : MM. Monge, Leroy, Lefébure de Fourcy.
— la *Statique* : M. Poinsot.

indication suffit pour rendre possible la préparation que nous recommandons spécialement.

Il n'est pas hors de propos d'insister sur la nécessité pour l'élève de faire avec soin tous les devoirs donnés par le professeur. Ces devoirs sont généralement des applications de la théorie générale, ou des problèmes. Les premières servent à graver profondément dans l'esprit les méthodes et les propositions sur lesquelles la science repose; les seconds, à exercer utilement l'intelligence, et à faire apprécier l'aptitude et la sagacité.

Dans la résolution des problèmes, l'élève, après avoir trouvé la solution demandée, ne manquera pas de la discuter, et de généraliser la question autant que possible. Il s'attachera à résoudre le plus de problèmes qu'il pourra, ne perdant pas de vue que cet exercice peut seul lui donner le coup d'œil prompt et sûr dont il aura besoin, à l'examen d'abord, et ensuite dans la carrière qu'il doit parcourir (1). Toutefois, ce travail, quelque utile qu'il soit, ne doit pas lui faire négliger son travail de classe, et, avant tout, la rédaction de la leçon du jour.

Ces conseils généraux, que nous ne faisons que répéter ici après le professeur, s'appliquent particulièrement au mode de travail de l'élève pendant toute la durée des études préparatoires.

Il ne sera peut-être pas sans utilité d'entrer dans quelques détails sur chacune des matières de l'enseignement mathématique.

---

(1) Les élèves de mathématiques élémentaires et spéciales pourront se servir des ouvrages ci-après : *Problèmes d'arithmétique*, par M. Saigey ; *Problèmes et développements*, par MM. Duhamel et Reynaud. *Problèmes d'algèbre; Problèmes de géométrie et de trigonométrie ; Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie* (1[re] partie, ligne droite et cercle ; 2[e] partie, ligne droite, cercle, ellipse, hyperbole), par l'auteur du *Manuel.*

Arithmétique. — En général les élèves de mathématiques spéciales affectent un superbe mépris pour le calcul en général, et en particulier pour le calcul numérique : nous regrettons de dire que nous avons vu plus d'une fois des aspirants balbutier à l'examen en énonçant un nombre écrit, hésiter en écrivant un nombre énoncé, faire avec difficulté un calcul assez simple; puis, un instant après, exposer avec un aplomb remarquable les théories les plus difficiles, ou rendre compte avec une parfaite intelligence de la forme et de la position d'une courbe dont l'équation était très compliquée.

On ne saurait trop répéter aux jeunes gens qui se livrent à l'étude des mathématiques que le calcul numérique est le terme où viennent aboutir les plus sublimes théories. Toutes les sciences mathématiques ont pour but la mesure des grandeurs : longueur, surface, volume, force, mouvement, etc. Le programme d'examen pour l'admission à l'École polytechnique est renfermé et développé presque en entier dans un seul livre auquel Newton a donné le titre d'*Arithmétique universelle*, titre plus général encore que le livre lui-même.

Que les élèves s'exercent donc au calcul numérique. Les théories les plus difficiles de l'arithmétique n'ont été inventées que pour rendre le calcul plus facile. Les élèves de mathématiques spéciales qui ont déjà quelques notions des propriétés des nombres ne doivent pas manquer l'occasion de faire preuve de ces connaissances, non pas seulement dans le calcul écrit, mais aussi dans le calcul oral. La facilité de combiner rapidement les nombres offre de très grandes ressources dans la vie ordinaire, à plus forte raison dans les diverses carrières qu'ils auront à parcourir un jour.

Quant au calcul écrit, ils n'ignorent pas les avantages des logarithmes : qu'ils s'habituent à se servir des tables dans tous les calculs auxquels les logarithmes sont applicables.

Algèbre. — Sans avoir besoin de répéter le conseil que nous venons de donner aux élèves sur la nécessité de s'exercer au calcul, afin d'acquérir la facilité et l'exactitude, nous nous bornerons à leur rappeler que les formules algébriques ne sont utiles qu'autant qu'elles sont applicables et appliquées. Ainsi, pour ne prendre qu'un ou deux exemples, pourquoi les élèves ne s'habitueraient-ils pas à écrire immédiatement les valeurs des inconnues renfermées dans deux équations du premier degré? Pourquoi, lorsque, après avoir trouvé une racine commensurable d'une équation donnée, ils veulent abaisser le degré de l'équation en divisant son premier membre par l'inconnue moins la racine, n'écrivent-ils pas sur-le-champ le quotient, dont ils connaissent la forme générale? Pourquoi, enfin, n'expriment-ils pas sur-le-champ par la formule générale les valeurs des deux inconnues d'une équation indéterminée du premier degré? Nous pourrions multiplier les exemples à l'infini; mais les élèves comprendront facilement l'importance de la remarque précédente, et nous croyons superflu d'entrer dans de plus grands détails à ce sujet.

MM. les professeurs de mathématiques ne manqueront pas d'enseigner à leurs élèves les théories nouvelles adoptées et recommandées par l'Université; entre autres, le beau théorème de M. Sturm, sur le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux limites données; ce qui permet de déterminer *à priori* le nombre des racines réelles sans avoir recours à l'équation aux carrés des différences des racines.

Les élèves doivent s'habituer à appliquer à chaque équation proposée toutes les théories qui peuvent en amener la résolution. Ces exercices de calcul sont utiles au plus haut degré et font mieux comprendre la corrélation des méthodes.

Géométrie élémentaire. — La géométrie élémentaire est,

sans contredit, une des parties les plus essentielles du programme.

On ne saurait trop vivement recommander aux élèves l'étude des propriétés des figures, des mesures de surface et de volume, en un mot de toutes les propositions, théorèmes et problèmes, qui sont renfermées dans la géométrie.

Les vérités pratiques qui résultent de cette étude sont en petit nombre sans doute; mais chacune d'elles est le résultat d'un certain nombre de propositions qui s'enchaînent et se soutiennent mutuellement, au point que, si la mémoire est en défaut pour la démonstration d'une quelconque d'entre elles, à l'instant toute clarté disparaît, et l'esprit s'embarrasse et se perd dans un véritable chaos.

La géométrie, comme toute autre branche de l'enseignement mathématique, se partage en deux parties, dont chacune a son importance spéciale : la théorie ou la suite des théorèmes, l'application ou les problèmes.

Les démonstrations des théorèmes doivent être apprises avec soin, dans un véritable esprit d'analyse, de manière que l'intelligence puisse venir au secours de la mémoire : car on ne peut se dissimuler qu'il y a dans les divers procédés de démonstration quelque chose qui paraît arbitraire au premier aspect, mais qui n'est réellement que la conséquence des principes posés antérieurement. Aussi nous n'approuvons pas que l'élève entremêle dans son esprit des démonstrations appartenant à des traités différents, à moins que la théorie de l'auteur qu'il étudie ne soit réellement vicieuse ou inférieure à d'autres théories, sous les points de vue de la logique ou de l'application. Ainsi la théorie des incommensurables dans l'ouvrage de M. Legendre, quoique complète et d'une vérité inattaquable, doit être nécessairement remplacée par la théorie des limites et des infiniment petits, qui est d'une utilité et d'une commodité généralement reconnues aujourd'hui.

L'application de la théorie renferme elle-même deux parties, dont l'une est purement spéculative, et l'autre pratique. La première indique le moyen de trouver la solution du problème proposé; la seconde n'est autre chose que le calcul si le problème est numérique, ou la construction des lignes, surfaces, etc., si le problème est graphique. Nous avons déjà insisté assez longuement sur la nécessité des exercices de calcul, pour nous dispenser de revenir sur les conseils précédents à ce sujet. Quant à la construction graphique des problèmes, nous croyons nécessaire d'entrer dans quelques détails.

Tous les problèmes graphiques de géométrie élémentaire se réduisent définitivement à tracer des lignes droites dans certaines directions déterminées, des circonférences données de grandeur et de position, à diviser des longueurs en parties égales ou proportionnelles à d'autres longueurs données, à tracer des figures rectilignes ou circulaires d'après certaines conditions, etc. Or, toutes ces constructions sont aux problèmes de géométrie ce qu'est le calcul aux problèmes d'arithmétique. La théorie enseigne les moyens de les effectuer aussi exactement que possible, à l'aide des instruments connus, tels que règles, compas, rapporteurs, équerres, etc.

Nous engageons les élèves à s'exercer à ce tracé exact, en se servant de règles métriques graduées, afin que l'œil s'habitue de bonne heure aux mesures de longueur. Ils auront soin de prendre pour données de leurs problèmes des longueurs, des angles déterminés numériquement, et de trouver successivement la solution par la construction graphique et par le calcul, afin de corriger les deux solutions l'une par l'autre, ou plutôt afin de s'assurer que la solution du problème est exacte.

Ils devront s'exercer aussi au tracé des figures sans le secours des instruments. Ce dessin linéaire à vue, d'une utilité incontestable dans leurs études mathématiques, leur

sera plus tard d'une plus grande utilité encore pour les croquis de projets, dessins de machines, etc., qu'ils seront chargés de faire exécuter.

Enfin les formules géométriques seront apprises par cœur, afin d'en pouvoir faire immédiatement l'application dans chaque cas particulier.

Nous avons cru remarquer que l'étude de la géométrie sphérique laissait généralement à désirer dans les examens d'admission. On ne doit pas oublier que ces notions sont comprises dans le programme, et quoique les solutions des problèmes de géométrie sphérique se ramènent facilement au calcul numérique ou littéral, à l'aide des formules trigonométriques, on ne devra pas négliger d'effectuer les constructions graphiques à l'aide des compas courbes sur une sphère de bois verni. Nous recommandons particulièrement ces exercices à messieurs les professeurs.

Trigonométrie rectiligne. — Les élèves s'attacheront à apprendre par cœur les formules fondamentales de la trigonométrie, à combiner rapidement ces formules, ce qui n'est qu'un travail de calcul littéral. Ils discuteront avec soin toutes les valeurs des arcs correspondants à une même ligne trigonométrique, et s'exerceront à trouver la valeur d'une ligne trigonométrique quelconque, connaissant la valeur d'une autre ligne trigonométrique correspondante au même arc ou à un arc multiple ou sous-multiple. Enfin ils devront posséder les formules pour la résolution des triangles, transformer ces formules pour les rendre applicables au calcul logarithmique, et effectuer les calculs à l'aide des tables des sinus, dont l'usage doit leur être aussi familier que celui des tables des logarithmes des nombres. Il sera utile de s'exercer à résoudre les problèmes de géométrie plane au moyen des formules trigonométriques, toutes les fois que la question le permet, et de vérifier par ce moyen la solution numérique ou graphique trouvée par un moyen purement géométrique.

Application de l'algèbre à la géométrie. — Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'utilité de retenir les formules principales de la géométrie analytique : équations de droites d'après certaines conditions données; distances de deux points, d'un point à une droite donnée par son équation; formules de transformations de coordonnées; équations des trois courbes du deuxième degré dans certaines positions déterminées, des tangentes, des normales; valeur des sous-tangentes, des sous-normales, etc.

La recherche du centre des diamètres, des foyers, des tangentes, des asymptotes, et, en général, la discussion et la construction des courbes, non seulement du deuxième degré, mais encore des degrés supérieurs, seront l'objet d'une attention toute particulière. Cette discussion, très importante par elle-même, offre le moyen d'appliquer les méthodes algébriques, et met promptement en évidence l'intelligence et la capacité des aspirants.

La discussion des courbes rapportées à des coordonnées polaires ne sera pas non plus négligée. Un exercice utile consistera à discuter successivement la même courbe, en la rapportant soit à des coordonnées parallèles, soit aux coordonnées polaires, à l'aide des formules connues de transformation.

Nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons dit de l'importance des problèmes en général. Ici cette importance est plus grande en quelque sorte, à cause de la réunion des connaissances qu'exige leur résolution. Calcul numérique et littéral, discussion, construction graphique, les problèmes de géométrie analytique embrassent à peu près toutes les notions acquises. C'est ici surtout que s'applique la remarque que nous avons faite précédemment. La solution des problèmes exige un coup d'œil exercé, une mémoire sûre, qui permettent de reconnaître promptement, à l'aspect du résultat, la construction graphique la plus simple et la plus élégante.

Quoique le programme des connaissances exigées ne fasse mention que des propriétés principales des courbes du deuxième degré, il existe certaines courbes de degrés supérieurs et même des courbes transcendantes, dont l'usage est trop fréquent pour qu'il soit permis d'en ignorer la forme et l'équation. Parmi ces courbes nous citerons les cissoïdes, les conchoïdes, les cycloïdes et les épicycloïdes. L'élève les trouvera, au besoin, dans les exercices du Manuel.

Géométrie descriptive. — Les aspirants ne sont interrogés que sur les notions élémentaires de géométrie descriptive. Ils se pénétreront bien des principes de ce procédé, et s'attacheront à faire avec soin toutes les épures des problèmes sur la ligne droite et les plans, dans toutes les positions possibles des plans de projection. Ces dessins, qui seront apportés à l'examen, doivent être exécutés avec une très grande exactitude et avec cette pureté de trait qu'on ne peut acquérir que par un exercice souvent répété. Nous engageons les élèves à se livrer avec attention à ce travail, qui les préparera au dessin des épures compliquées dont les cours de l'École polytechnique et des Écoles spéciales leur offriront de nombreux exemples.

Statique. — D'après le programme adopté pour l'enseignement des mathématiques, la statique fait partie du cours de première année, afin que les élèves qui se destinent à l'École militaire ou à l'École navale puissent achever les études nécessaires pour l'admission à ces Écoles. Toutefois, ce n'est qu'après avoir étudié l'algèbre et l'application de l'algèbre à la géométrie qu'on peut réellement suivre avec fruit l'enseignement de cette partie importante des mathématiques.

Les aspirants feront donc bien de revoir la statique vers la fin du cours de la deuxième année. Quant à des conseils particuliers pour cette étude, nous avons peu de chose

à ajouter aux conseils généraux qui précèdent ; seulement nous engageons les élèves à s'exercer à des questions ayant pour but la combinaison des forces, en représentant ces forces par des nombres ; à se bien pénétrer de la théorie des couples, si élégante et si commode pour les démonstrations ; enfin à étudier très attentivement les conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces, soit que ces forces concourent en un même point, soit qu'elles soient situées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace, et à retenir et exprimer sur-le-champ les conditions d'équilibre dans chaque cas particulier.

La recherche des centres de gravité étant une des questions les plus fécondes de la statique et de la géométrie, nous la recommanderons particulièrement aux élèves, et, quoique le programme ne mentionne que le centre de gravité du triangle et de la pyramide, nous croyons qu'il y aurait utilité à savoir démontrer, dès les éléments, le centre de gravité de l'arc de cercle, du secteur, de la zone, du segment sphérique, et à pouvoir démontrer les beaux théorèmes de Guldin sur la mesure des surfaces et des volumes des corps de révolution par la connaissance des centres de gravité des lignes et des surfaces génératrices. Ces problèmes et ces théorèmes n'exigent d'aucune façon l'emploi du calcul différentiel et intégral. Sans doute les méthodes tirées de cette haute analyse sont d'une application plus générale et plus vaste ; mais il ne peut y avoir qu'avantage à tirer des méthodes élémentaires tout ce qu'elles peuvent donner, et nous croyons qu'on ne saurait faire un meilleur usage des connaissances acquises jusque là, ni trouver un exercice de calcul plus intéressant et plus utile tout à la fois.

Enfin l'application de la théorie des forces et des couples aux conditions d'équilibre et des machines simples, telles que le levier, le plan incliné, la vis, le treuil, etc., doit être parfaitement connue des élèves. Ils s'exerceront à des ques-

tions numériques, afin de mieux comprendre l'utilité de ces machines dans les procédés de l'industrie.

Nous ne terminerons pas ces considérations particulières à l'étude de chaque branche des connaissances mathématiques renfermées dans le programme, sans adresser aux aspirants un dernier conseil qui s'applique à tout le cours de cet enseignement et à la manière de se préparer à l'examen oral du concours.

Beaucoup de jeunes gens d'un esprit vif et prompt s'imaginent savoir quand ils n'ont fait que comprendre : aussi sont-ils tout étonnés de se trouver embarrassés quand il s'agit d'expliquer eux-mêmes ce qu'ils ont parfaitement entendu aux leçons du professeur ou à la lecture du livre. Nous ne saurions mettre les aspirants trop en garde contre cette funeste erreur. Il faut, à chaque leçon du maître, s'assurer qu'on l'a bien saisie, qu'on est en état de la répéter seul, sans le secours des rédactions ni des livres, au tableau noir ou sur le papier. Le professeur n'a pas le temps d'interroger chaque jour chacun de ses élèves; c'est aux élèves à s'interroger consciencieusement, à être aussi exigeants que le serait le professeur lui-même.

Ils s'attacheront à tracer avec netteté et élégance, sur le tableau noir, les figures nécessaires aux démonstrations. Combien de fois n'a-t-on pas vu des aspirants, d'ailleurs intelligents et assez capables, s'embarrasser au tableau dans la construction de certaines figures géométriques, et gâter leur examen, pour ne s'être pas suffisamment exercés à ce dessin ? Parmi ces figures, nous pourrons citer celles qui servent à la démonstration du carré de l'hypothénuse, dans toutes les positions possibles du triangle rectangle; des propriétés des perpendiculaires aux plans, et en général de toutes les propositions qui se rapportent à la droite et au plan dans l'espace; de l'équivalence des tétraèdres lorsqu'ils ont une base équivalente et même hauteur; de la similitude des pyramides triangulaires, etc.

Ils s'habitueront principalement à parler le langage mathématique avec cette précision, avec cette exactitude sévère dont la plupart des auteurs classiques leur offrent de si heureux modèles. Un langage embarrassé, diffus, obscur, est presque toujours l'indice d'un esprit faux ou léger. La rectitude du jugement, le vrai savoir, se révèlent promptement par l'ordre et l'arrangement des idées, par la justesse et la propriété des expressions. Les élèves ne perdront jamais de vue que la timidité, le trouble naturel à l'approche d'un moment aussi important, peuvent avoir une fâcheuse influence sur leur esprit et diminuer les chances de succès, et qu'il faut, par conséquent, savoir beaucoup et savoir bien; qu'il faut, en un mot, s'identifier avec la science par une étude approfondie des idées et du langage.

Enfin nous recommanderons aux aspirants de ne pas se contenter de considérer les questions sous un seul point de vue ou d'une manière particulière. Les théories mathématiques sont enseignées sous une forme simple et précise; il semble au premier aspect qu'elles ne peuvent être présentées d'une autre manière; mais en les étudiant attentivement, on en voit sortir une foule de conséquences qui leur donnent un aspect nouveau. C'est par cet examen approfondi que les élèves se mettront en état de répondre à toutes les objections, d'effectuer toutes les applications sans hésitation et sans embarras. Que si une question particulière se présente, ils s'efforceront, après l'avoir résolue, de lui donner toute l'extension qu'elle peut recevoir. Cet esprit de généralisation est éminemment utile dans les études ainsi que dans la vie ordinaire : les élèves ne sauraient s'y exercer de trop bonne heure. C'est ainsi que les études perdent ce caractère spécial qui semble en restreindre l'utilité, pour concourir au but principal de l'éducation, c'est-à-dire au développement complet de l'intelligence.

ÉTUDES LITTÉRAIRES.

—

Nous regrettons d'avoir à rappeler ici par quelle déplorable erreur la plupart des aspirants à l'Ecole polytechnique abandonnent, avant le temps, les études littéraires, pour se livrer presque exclusivement à l'étude des mathématiques. Nous avons tâché de faire comprendre non seulement la possibilité, mais encore la nécessité de suivre avec une égale attention l'enseignement littéraire et l'enseignement scientifique prescrits par l'Université. L'importance du sujet nous fait un devoir d'ajouter quelques réflexions, à l'effet de combattre un préjugé invétéré dans certains esprits, et dont les conséquences pourraient être funestes au développement de l'intelligence et à l'avenir de l'éducation nationale.

En général, il faut bien le reconnaître, ce préjugé existe dans nos colléges, et c'est là qu'il se perpétue, nonobstant les prescriptions formelles renfermées dans les règlements qui déterminent les conditions des concours pour l'admission au professorat. Les professeurs de littérature, comme les professeurs de sciences naturelles, mathématiques et physiques, doivent avoir au moins le titre et le diplome de bachelier ès lettres; ce qui prouve, chez les uns comme chez les autres, des connaissances communes en sciences et en littérature suffisantes pour leur en démontrer le rapport intime et le secours qu'elles se prêtent mutuellement. S'il était nécessaire de citer des exemples sans sortir de notre histoire, les noms de Descartes, Pascal, Dalembert, Buffon, Condorcet, Carnot, Laplace, Cuvier, et ceux d'une foule

d'hommes éminents de notre âge, suffiraient, sans aucun doute, pour montrer l'absurdité de ce préjugé, qui établit une sorte d'incompatibilité entre les lettres et les sciences. Peut-être ne sait-on pas assez que l'Ecole polytechnique n'est elle-même qu'une école préparatoire, où les jeunes gens s'instruisent des connaissances mathématiques et physiques nécessaires pour l'intelligence d'autres études spéciales, et applicables à chacune des branches du service public, voies et communications, mines, génie militaire et maritime, marine, artillerie. Avec une intelligence développée et quelques connaissances élémentaires en mathématiques, un jeune homme qui aurait terminé avec fruit toutes ses études littéraires serait probablement très apte à suivre l'enseignement de l'École. Si notre mémoire ne nous trompe pas, l'année 1816 ou 1817 a été formée en grande partie par des élèves de rhétorique et de philosophie qui n'avaient que des notions très élémentaires de mathématiques, et nous ne pensons pas que cette génération ait été, en aucune spécialité, inférieure à celles qui l'ont précédée ou suivie.

Mais, sans avoir recours à ces cas exceptionnels, il nous suffit d'avoir démontré par un simple raisonnement la possibilité d'achever avec un égal succès les études littéraires et les études scientifiques. Les exemples ne manquent pas pour corroborer ce raisonnement. Du temps de l'empire, les jeunes gens ne se présentaient à l'examen de l'école qu'après avoir passé par toutes les classes du collége. Dans les colléges des départements cet usage s'est généralement conservé. Ne perdons pas une aussi bonne tradition ; que la jeunesse de l'Ecole polytechnique soit toujours l'élite de la jeunesse française. Ce n'est pas sans raison que les règlements de l'École prescrivent l'étude de la littérature. A quoi servirait cet enseignement s'il n'était adressé à des esprits déjà préparés? Et si l'enseignement de la littérature fait partie des cours de l'École, c'est qu'on a parfaitement compris qu'il y aurait péril pour l'intelligence et pour le juge-

ment dans des études exclusivement scientifiques. L'Ecole polytechnique n'est qu'un but accidentel dans la vie, n'est qu'une première borne dans la carrière. Pour la parcourir glorieusement il faut se munir de toutes les provisions intellectuelles qui soutiennent et qui fortifient.

Nous avons peu de chose à dire aux aspirants qui ont terminé toutes leurs études littéraires; seulement ils feront bien de relire de temps en temps les auteurs latins qu'ils ont expliqués en classe, de s'exercer à quelques compositions sur divers sujets historiques ou philosophiques, afin d'être suffisamment prêts au jour des épreuves.

Quant à ceux qui ont eu le malhenr d'interrompre leurs études littéraires, leur tâche est plus difficile et le succès beaucoup moins certain. Dans quelques établissements, tels que colléges, écoles préparatoires et autres, on leur donne rapidement quelques notions de la langue latine et de composition française. Qu'ils ne se bornent pas aux leçons du maître : de fréquentes traductions, de nombreuses lectures, des exercices de rédaction souvent répétés, pourront, jusqu'à un certain point, réparer le tort de leur éducation imparfaite. Nous craignons pourtant que, malgré tous leurs efforts, ils ne parviennent pas à soutenir le rang qu'ils auront obtenu par l'examen mathématique. D'année en année l'épreuve littéraire devient plus difficile. C'est un véritable progrès, dont la concurrence des aspirants autant que le désir d'amélioration faisaient une loi et un besoin.

ÉTUDES DU DESSIN ET DU LAVIS.

—

Les connaissances en dessin, exigées d'après le programme, se composent des notions élémentaires de dessin linéaire et des ombres, soit au crayon noir, soit au lavis.

Les aspirants doivent apporter à l'examen quelques dessins géométriques tracés à la règle et au compas, pour prouver qu'ils se sont exercés à la solution graphique des problèmes de géométrie élémentaire et de géométrie descriptive. Sans revenir sur ce que nous avons dit précédemment de l'utilité de cet exercice, nous nous bornerons à indiquer quelques problèmes graphiques dont les dessins doivent être faits avec le plus grand soin.

D'abord, tous les problèmes élémentaires de géométrie descriptive sur la ligne droite et le plan.

Parmi les questions de géométrie, nous citerons les suivantes :

I. Si l'on divise en deux parties égales les angles intérieurs et extérieurs d'un quadrilatère, les bissectrices se coupent deux à deux sur une circonférence, et les deux quadrilatères ainsi formés ont leurs diagonales dirigées deux à deux suivant les mêmes droites.

II. Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés et passant par un point donné.

III. Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.

IV. Inscrire dans un cercle donné un triangle dont chacun des côtés passe par un point donné.

V. Inscrire dans un quadrilatère donné un second quadrilatère d'espèce donnée.

VI. Décrire une ellipse ayant son centre en un point et passant par trois points donnés.

VII. Par cinq points donnés faire passer une ellipse.

VIII. Etant donné les asymptotes et un point d'une hyperbole, décrire la courbe.

IX. Trouver, par une construction graphique, les points d'intersection d'une droite et d'une courbe quelconque du 2e degré.

X. Trouver, par la règle et le compas, les points d'intersection de deux courbes confocales du 2e degré.

XI. Décrire une ellipse tangente aux quatre côtés d'un parallélogramme donné et passant par un point donné.

XII. Décrire une parabole passant par quatre points donnés.

XIII. Etant donnés le foyer et deux points, décrire une ellipse semblable à une ellipse donnée.

XIV. Les dishomologues de trois ellipses semblables et semblablement situées se coupent en un même point.

XV. Déterminer le côté d'un cube double d'un autre.

XVI. Construire la courbe $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$.

XVII. Construire la courbe $\rho = a\cos\omega + b$.

XVIII. Etant donné trois points dans l'espace par leurs projections sur les plans coordonnés (géométrie descriptive), déterminer 1° le plan déterminé par ces trois points; 2° la circonférence qui passe par ces points; 3° les projections de cette circonférence sur les plans coordonnés.

XIX. Déterminer par une construction graphique le centre de gravité d'un tronc de pyramide triangulaire.

XX. Déterminer par une construction graphique le centre de gravité du segment sphérique à une base.

La distance du centre de gravité du segment au centre de la sphère est une troisième proportionnelle à l'excès du rayon sur le tiers de la flèche, et à l'excès de ce même rayon sur la moitié de la flèche :

$$d = \frac{\left(r - \frac{f}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{f}{3}\right)}.$$

Outre le dessin linéaire géométrique, les aspirants doivent s'être exercés à copier fidèlement des dessins de tête et d'académie, avec les ombres au crayon noir. Cette connaissance, qui est le complément d'une bonne éducation, est regardée à juste titre comme ayant une importance assez grande, au point que quelques aspirants n'ont dû leur rejet qu'à la faiblesse de l'épreuve du dessin. Il faut s'y prendre de bonne heure pour arriver à l'examen avec toute l'habitude et la facilité nécessaires. Les aspirants feront donc bien de donner au moins une heure par jour à cet exercice, et à l'approche du concours ils s'attacheront particulièrement à copier des académies, qu'ils ombreront à la moitié dans le temps fixé pour cette épreuve du concours.

Depuis quelques années le dessin au lavis a été ajouté au

programme. C'est une innovation heureuse et d'une utilité incontestable pour les aspirants, qui sont pour la plupart appelés à tracer des plans, à dessiner des cartes; à dessiner des machines non seulement dans leurs dimensions géométriques exactes, mais encore d'après leur forme visible et leurs effets. Les dessins au lavis, sur lesquels les aspirants devront s'exercer en commençant, leur offriront des applications intéressantes du dessin linéaire. Pour les teintes plates ils dessineront des socles, des entablements, etc.; pour les rondes-bosses, des colonnes, des moulures, des chapiteaux des différents ordres, et enfin quelques unes des machines élémentaires.

Plusieurs aspirants, après avoir subi sans succès un ou deux examens de concours, trouvent le temps de se livrer à des études supplémentaires avant de passer le dernier examen qui doit décider de leur admission à l'École ou de leur rejet définitif. A ces élèves nous recommanderons spécialement les applications de la géométrie descriptive à la perspective et aux ombres. Les premières forment le complément nécessaire à l'étude du dessin linéaire géométrique, ou plutôt ne sont autre chose que le dessin linéaire lui-même dans toute sa généralité.

Les secondes, c'est-à-dire les applications de la géométrie descriptive aux ombres, sont inséparables des premières, qui seules seraient insuffisantes pour faire juger de la forme des corps.

Les unes et les autres n'exigent que les plus simples notions d'intersection et de tangence des surfaces planes ou courbes, données par leurs projections.

Nous ne connaissons pas une application plus intéressante et plus utile du lavis. La théorie des ombres enseigne le moyen de déterminer, pour chaque position particulière du point lumineux, les points brillants et les dégradations d'ombres et de lumière sur les corps éclairés directement ou par réflexion. Il nous suffira d'avoir indiqué aux aspirants une étude qui leur sera plus tard d'une très grande utilité.

CONNAISSANCES SUPPLÉMENTAIRES

EN DEHORS DU PROGRAMME D'ADMISSION.

Les connaissances exigées par le programme sont plus que suffisantes, sans doute, pour préparer les aspirants aux cours supérieurs de l'Ecole; elles présentent assez de difficultés pour qu'on en fasse l'unique objet des études préparatoires. Nous engageons donc vivement les aspirants à ne pas sortir du cercle d'études tracé par le programme; ils n'oublieront pas qu'on ne tient compte des connaissances plus étendues qu'à ceux qui ont déjà fait preuve des connaissances nécessaires, et que rien ne saurait racheter un mauvais examen sur les matières exigées.

Au surplus, la plupart des professeurs de mathématiques spéciales ne manquent pas de donner à leur enseignement tous les développements nécessaires, et d'étendre, quand l'intérêt des élèves l'exige, le programme du cours de mathématiques de 2e année. Ainsi, les élèves étudient :

En algèbre, la résolution générale des équations des 3e et 4e degrés, la recherche des racines imaginaires des équations numériques, la résolution des équations binômes et trinômes;

En application de l'algèbre à la géométrie, la ligne droite, le plan, considérés dans l'espace; quelques notions sur les surfaces du 2e degré, et la trigonométrie sphérique;

En géométrie descriptive, quelques notions des intersections des surfaces coniques et cylindriques par les plans; les plans tangents à ces surfaces ainsi qu'à la sphère, et enfin le plan tangent à trois sphères;

En statique, les conditions d'équilibre d'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Quelques élèves croient pouvoir commencer l'étude du calcul différentiel et intégral avant d'avoir subi l'examen d'admission. Outre le danger de confondre les méthodes, nous pensons qu'il y a peu d'avantage réel à charger la mémoire de notions incomplètes. Qu'ils se préparent plutôt, par de fortes études élémentaires, aux leçons de l'analyse supérieure; c'est le meilleur conseil que nous puissions leur adresser. Le champ de ces études est assez vaste pour l'intelligence la plus développée; et, nous ne saurions trop le répéter, il ne suffit pas d'avoir parfaitement compris, il faut surtout garder fidèlement dans la mémoire, non pas comme un écolier qui doit répéter mot à mot la leçon du maître, mais en homme qui s'est approprié, par de longues et sérieuses études, les méthodes et les théories, de manière à en faire sur-le-champ l'application, et à les discuter avec autorité.

A ce sujet nous nous permettrons d'exprimer nos regrets sur quelques abus qui se sont glissés depuis quelque temps dans l'enseignement des mathématiques. Nous avons cru reconnaître que trop souvent on avait essayé de renverser les limites naturelles que chaque spécialité doit toujours conserver. Ainsi, l'algèbre s'introduit dans l'arithmétique, le calcul différentiel dans l'algèbre, la dynamique dans la statique, etc. Chacune des branches des mathématiques a sa théorie, ses procédés de démonstration, que l'on ne doit pas méconnaître, qu'il faut s'attacher, selon nous, à faire bien ressortir : autrement on s'exposerait à jeter de la confusion et du trouble dans les idées, et à arrêter les progrès de la science au lieu de la faire avancer. Chaque chose à sa place; une place pour chaque chose : tel est le grand principe d'ordre que l'on ne peut violer sans danger, en enseignement comme dans toute autre circonstance de la vie.

Nous recommanderons aux aspirants de suivre avec beau-

coup d'attention et d'assiduité les cours de physique et de chimie élémentaire. Cette étude, très utile par elle-même, acquiert ici une importance plus grande; il est plus que probable que l'élève qui entrerait à l'École sans cette préparation ne pourrait suivre le cours de la première année, et s'exposerait à échouer à l'examen de la fin de la première année ou à l'examen de sortie de l'Ecole polytechnique, et à être jugé incapable d'être admis aux services publics.

Mais, sans parler de cette destination spéciale des études physiques et chimiques, aujourd'hui personne n'ignore que c'est à ces deux sciences que sont dues les plus utiles et les plus belles découvertes dans l'industrie et dans les arts. Les vérités mathématiques, quelle que soit leur importance, outre le petit nombre des principes véritablement essentiels et des applications usuelles, n'offrent généralement, à proprement parler, qu'un moyen de vérifier par le raisonnement et par le calcul les résultats de l'observation et de l'expérience. Les admirables observations de Kepler ont précédé les sublimes théories de Newton et de Laplace. Les sciences physiques s'appliquent constamment aux usages de la vie ordinaire. On ne saurait donc se préparer de trop bonne heure à cette étude; et sous ce rapport l'enseignement de l'Université est aussi complet que dans toutes les autres parties de l'enseignement scolaire.

Les aspirants qui ont suivi le cours des classes ont déjà quelques notions élémentaires de physique et de chimie lorsqu'ils sont parvenus en mathématiques spéciales. Là, l'étude de la physique est reprise avec plus de soin et de détails; il ne s'agit plus seulement, comme dans les classes antérieures, d'effleurer les principes, de se borner aux plus simples expériences : chaque partie de la science est traitée en particulier avec ses théories développées et ses applications réelles. L'élève doit rédiger le cours du professeur, en s'aidant soit de ses notes, soit du livre qui leur est

particulièrement désigné *. Il s'attachera à résoudre les problèmes de physique qui lui seront donnés par le professeur, avec autant de soin et d'attention qu'il en a mis à résoudre les problèmes de mathématiques ; il s'exercera à la solution de ces problèmes avec d'autant plus d'intérêt qu'ils lui offriront encore l'application des principes mathématiques qu'il étudie en même temps **. Les problèmes de physique sont sans contredit plus utiles que les problèmes de mathématiques pures, qui ne présentent le plus souvent qu'une utilité très restreinte à cause de leur caractère spéculatif.

A ce sujet, nous exprimerons le vœu que le programme du cours de physique destiné aux élèves de mathématiques soit définitivement arrêté par l'autorité universitaire. Il n'est que trop certain que le programme de l'enseignement de la physique adopté pour les classes élémentaires n'est pas un programme spécial ; il est trop complet pour la généralité des élèves, eu égard surtout au temps consacré aux leçons, et pas assez explicite pour les élèves de mathématiques spéciales.

On ne saurait trop recommander à MM. les professeurs de physique, pour les élèves de mathématiques spéciales, de compléter le cours de physique durant cette année scolaire. Nous avons acquis la certitude que la plupart d'entre eux, attachant plus d'importance peut-être aux phénomènes de

---

* Parmi les traités de physique autorisés par l'Université, nous citerons les ouvrages de MM. Biot, Pouillet et Péclet.

** Nous croyons rendre un véritable service à MM. les professeurs de physique, ainsi qu'aux élèves, en leur indiquant l'excellent ouvrage de M. Bary, *Nouveaux Problèmes de physique*, suivis des questions proposées au concours général depuis 1807 jusqu'à ce jour dans les classes de physique et de chimie.

calorique et d'électricité qu'aux autres phénomènes naturels, perdent, en longs développements sur cette première partie de la physique, un temps précieux qui leur manque vers la fin de l'année pour expliquer et développer suffisamment les principes de l'acoustique et de l'optique. Il nous suffira d'avoir indiqué une lacune, que nous avons cru reconnaître, pour que les élèves n'aient plus à regretter de n'avoir pas été également préparés sur toutes les parties du programme de l'enseignement de la physique.

Enfin les examinateurs ont soin de tenir compte des connaissances des aspirants en langues étrangères. Parmi ces langues nous recommanderons plus spécialement l'allemand et l'anglais, qui peuvent être d'une grande utilité, soit pour l'étude particulière, soit pour le service public.

La manière dont MM. les examinateurs cherchent à constater les connaissances des aspirants en langues étrangères consiste à faire traduire en français un passage d'un auteur anglais ou allemand. Cette épreuve ne paraît pas suffisante, et ne donne qu'une faible idée du savoir relatif des candidats. On ne doit pas perdre de vue que, dans la carrière publique à laquelle les élèves sont appelés, ils auront bien plus souvent besoin de parler une langue étrangère que de la traduire en français. A l'exception des lectures particulières, qui seront certainement très utiles, il n'y aura pour la traduction d'une langue étrangère qu'un très petit nombre d'occasions, tandis que l'habitude de parler cette langue leur sera d'une immense ressource dans leurs missions scientifiques ou en campagne, autant pour eux-mêmes que dans l'intérêt du service.

Nous recommanderons donc aux élèves à s'habituer de bonne heure à parler et à écrire la langue étrangère qu'ils étudient, afin de pouvoir fournir la preuve, au besoin, de leurs connaissances théoriques et pratiques.

IIe PARTIE.

EXAMENS D'ADMISSION.

EXAMEN ORAL.

On a vu d'après le règlement sur les examens d'admission que les épreuves que chaque aspirant doit subir sont des deux sortes : épreuves *orales*, épreuves *écrites*.

Les instructions contenues dans ce règlement montrent assez que toutes les garanties de justice et d'impartialité sont offertes aux candidats :

Examen oral sur la totalité du programme fait successivement par *deux* examinateurs ;

Composition mathématique ajoutée au programme pour constater l'instruction acquise et l'intelligence ;

Trois listes de classement pour les compositions mathématiques, littéraires et de dessin, outre les *deux listes* du double examen oral, servant à établir le classement définitif, d'où résulte l'admission ou le rejet.

A l'aide de toutes ces précautions, dictées par un esprit d'équité et de bienveillance, il est presque impossible que le vrai mérite n'obtienne pas le succès espéré. Le jugement par concours, on le sait, à toujours quelque chose

de chanceux et d'incertain; mais du moins les chances favorables sont considérablement augmentées par ces dispositions du règlement, et il n'y a véritablement qu'une incapacité réelle ou la timidité excessive qui soient en danger d'échouer.

Nous engageons vivement les aspirants à ne se présenter à l'examen que lorsqu'ils sont suffisamment préparés. Quelques esprits impatients ou hasardeux ont essayé de le subir avant d'avoir acquis toute l'instruction nécessaire. L'expérience n'a pas manqué de tourner contre eux d'abord, et plus d'une fois les conséquences de cet imprudent essai se sont fait sentir dans les examens suivants. On s'était présenté sans crainte à cet examen d'essai; le souvenir du premier échec trouble et déconcerte au véritable examen. Laissons donc de côté ces expériences anticipées, qui annoncent toujours un peu de présomption ou de légèreté L'examen est chose trop sérieuse pour qu'on ne prenne pas toutes les précautions avant de l'entreprendre.

Nous supposons un candidat, suffisamment préparé, appelé à subir l'examen oral sur les mathématiques. S'il a été habitué à répéter au tableau les leçons du professeur, il ne devra voir dans cette épreuve qu'une continuation des examens ordinaires de ses classes. Il s'attachera d'abord à saisir parfaitement la question de l'examinateur; il la répétera pour s'assurer qu'il l'a bien entendue; ensuite, sans trop se préoccuper de l'importance, de la solennité de l'examen, il tâchera de la développer avec assurance, avec clarté et précision, ne donnant rien au hasard, de peur de provoquer des objections qui pourraient lui faire perdre le fil de ses idées, et, sans sortir de la question, rendant ses réponses aussi complètes que possible.

Que si la mémoire est en défaut sur une question de théorie ou d'application, si l'intelligence ne vient pas à l'aide de la mémoire, s'il échoue en un mot sur une ou plusieurs questions, il ne perdra pas courage: il se sou-

viendra que toute chance de succès n'est pas perdue, puisqu'il reste encore du temps pour d'autres questions, puisqu'il reste un second examen pour racheter la faiblesse du premier.

En général l'impatience et le découragement sont les deux défauts les plus dangereux pour le candidat. Toute question d'examen doit être traitée sérieusement, avec le plus grand soin, car elle emporte avec elle un jugement de l'examinateur. Combien de candidats n'ont-ils pas failli à la plus simple question, qui leur paraissait sans importance et trop élémentaire?

MM. les examinateurs ont soin de poser au candidat, dès le début de l'examen, une question facile, afin de lui donner toute l'assurance nécessaire pour répondre aux questions suivantes. Le candidat doit mettre à profit cette disposition bienveillante de l'examinateur. Les effets de la timidité sont redoutables, on ne saurait le nier. Mais le candidat bien pénétré de son sujet ne manque pas de reprendre une assurance convenable, surtout s'il a bien répondu à la première question. On peut dire que le résultat de l'examen dépend en grande partie de la premiére ou des deux premières réponses.

Les questions de l'examen sont de deux sortes : les unes ont pour objet le développement d'une théorie particulière; les autres, l'application des méthodes à la résolution des problèmes. Les premières sont presque entièrement du ressort de la mémoire; il faut parfaitement savoir son cours pour y répondre avec succès. Les secondes exigent principalement de la sagacité et de l'intelligence ; c'est la partie difficile de l'examen. Le candidat devra opérer au tableau comme il le ferait dans le silence de l'étude, avec cette différence seulement que le raisonnement se fait ici à haute voix. Dans une semblable épreuve, l'examinateur tient compte des efforts, même quand ils ne sont pas suivis du succès. Une question difficile, lors même qu'elle ne serait pas ré-

solue par le candidat, peut lui donner l'occasion de mériter une note très favorable, pour l'intelligence et l'instruction dont il aura fait épreuve.

Enfin le candidat ne perdra pas de vue que l'examen oral n'a pas seulement pour but de constater la capacité et l'instruction acquise des aspirants, mais aussi les dispositions particulières de chacun d'eux, ainsi que les qualités et les défauts de l'esprit. Cette note morale est de la plus grande importance et ne peut manquer d'avoir une très grande influence sur le jugement définitif. Le candidat s'attachera par conséquent à faire ressortir l'ordre, la clarté, la précision, la justesse de jugement dans ses réponses orales, avec autant de soin qu'il évitera les défauts contraires, le désordre, l'obscurité, le langage diffus, la légèreté et la précipitation, qui indiquent toujours un jugement mal formé, un raisonnement peu solide et inexact.

Nous ne pouvons nous dissimuler que ces conseils ont quelque chose de trop général dans l'expression, et d'insuffisant dans la pratique. Comment en effet le candidat peut-il s'assurer qu'il est suffisamment préparé? Comment serait-il sûr d'avance qu'il ne sera pas arrêté par une question difficile de l'examinateur, dans un moment où le trouble et la timidité peuvent paralyser une partie de ses facultés? Les interrogations du professeur de classe, quelque fréquentes qu'elles soient, ne sont pas des examens d'admission. Le seul moyen qui nous a paru praticable et utile est d'offrir aux candidats une série d'examens, renfermant un nombre égal de questions, à peu près de la même force. Les aspirants s'exerceront à ces examens préparatoires, au tableau noir autant qu'il sera possible, en parlant à haute voix comme s'ils étaient en présence de l'examinateur et du public. Ils tâcheront de se réunir entre eux, afin de rendre cette espèce de répétition de l'examen plus profitable. Chaque candidat, fût-il seul, peut tirer un grand avantage de cet exercice; à deux, l'avantage est plus grand encore : c'est une application du procédé d'enseignement mutuel, que

nous croyons très utile dans une pareille circonstance et pour des intelligences déja exercées.

A l'aide de cet exercice, chaque candidat ne peut manquer de s'assurer s'il est prêt à répondre à l'examen : s'il se trouve embarrassé pour résoudre et développer deux questions sur dix, il peut être sûr qu'il échouera dans les épreuves orales.

Parmi ces questions, les unes appartiennent aux cours, et sont développées dans tous les ouvrages classiques. Les autres, renfermées aussi implicitement dans le programme, ont besoin de quelques développements ; nous les donnons à la fin de l'ouvrage. Mais nous ne saurions trop recommander aux candidats de n'avoir recours à cette partie du livre que dans le cas où ils seraient incapables de trouver par eux-mêmes la solution et les développements nécessaires.

Nous devons aussi prévenir les candidats que ces développements ne portent que sur la question principale. C'est à eux à juger s'ils sont en état de démontrer les principes qu'ils auront besoin d'invoquer subsidiairement dans le cours de ces développements. Et nous ne saurions trop leur recommander d'être scrupuleux dans cet examen de conscience : car ils ne peuvent douter qu'au moment de l'examen, ils ne manqueront pas d'être appelés à répondre sur toutes les questions qui se rattachent à la question principale, laquelle le plus souvent n'est, en quelque sorte, qu'un point indiqué par l'examinateur pour rappeler les idées de l'élève et les porter ensuite subitement sur tel ou tel autre point voisin. Dans les sciences mathématiques, comme dans toute science exacte et bien faite, les propositions s'enchaînent et se tiennent étroitement liées ; et, de quelque point qu'on parte, il faut qu'on puisse, en en parcourant toute la série, remonter aux premiers principes ou arriver aux dernières conséquences.

Toutefois, nous avons cru devoir indiquer dans chaque question des examens une ou deux questions auxquelles peuvent conduire les développements de la question principale. Il eut été facile d'en présenter un plus grand nombre ;

mais nous pensons que cette indication suffira pour appeler l'attention des élèves sur la manière dont chaque question doit être développée.

Lorsque la question est purement numérique, l'élève, après l'avoir résolue, expliquera la méthode générale, et démontrera les principes ou les théorèmes sur lesquels la théorie repose. S'il s'agit d'une équation de courbe à discuter, il procédera à cette discussion en appliquant la méthode générale pour la discussion et la construction des lieux géométriques exposée dans la 3e partie (no 38).

Les calculs doivent être faits avec une approximation suffisante, au moins à 0,01 près. Nous prévenons, une fois pour toutes, que, dans aucun cas, nous n'emploierons aucune des méthodes du calcul différentiel et intégral, sous quelque dénomination que ce soit. Les méthodes élémentaires par la division et par l'extraction des racines des quantités algébriques doivent suffire pour la discussion des équations. La théorie des dérivées des équations algébriques étant du domaine de l'algèbre supérieure, l'élève peut s'en servir; et c'est en effet la seule méthode élémentaire que l'on puisse adopter pour la recherche des tangentes. Nous n'avons pas jugé nécessaire de donner un grand nombre de figures de courbes. Quelques indications pour les équations les plus compliquées suffiront sans doute au lecteur pour l'aider à construire ces lieux géométriques. Il est important qu'il s'habitue à traduire promptement en lignes les résultats du calcul. Dans les cas d'approximation, les longueurs seront données par l'échelle des dîmes, ou par les compas de proportion et de réduction. Nous n'avons pas besoin de recommander aux aspirants de comparer les figures de courbes entre elles, ainsi que leurs équations, afin qu'ils puissent en retenir les formes, et se les rappeler au besoin dans les examens du concours. Ce champ d'études est vaste sans doute, mais il est naturellement resserré par les conditions de l'examen, qui ne permettent pas de donner à discuter des équations de degrés très élevés.

PREMIER EXAMEN *.

1. Enoncer le nombre 1234567890.

Quelle est la plus haute espèce d'unités d'un nombre de 17 chiffres?

Exposer la règle générale pour énoncer un nombre entier écrit en chiffres, et réciproquement pour écrire en chiffres un nombre énoncé.

2. Théorie de l'égalité des triangles.

Démontrer que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

3. Trouver le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à deux points donnés soit égal à un rapport donné (géométrie élémentaire.)

4*. Deux voyageurs, allant à la rencontre l'un de l'autre, partent en même temps de deux villes, distantes de 215 lieues.

Le premier fait 3 lieues le premier jour, et pendant les jours suivants 2 lieues de plus que le jour précédent; le second fait 5 lieues le premier jour, et pendant les jours suivants 1 lieue de plus que le jour précédent.

Dans combien de jours se rencontreront-ils, et quel chemin chacun d'eux aura-t-il parcouru?

---

* Les questions marquées d'un astérisque sont développées dans la troisième partie.

5. Exposer la théorie des limites des racines d'une équation.

6 *. Démontrer que le volume d'un tronc de cône droit est égal au produit de la surface du trapèze générateur par la circonférence que décrit son centre de gravité.

7. Etant donné $\sin a$, trouver $\tang \frac{1}{2} a$.

Déterminer le nombre de valeurs de l'inconnue et expliquer leur réalité.

8 *. Exposer la méthode générale des tangentes aux courbes algébriques, et déterminer les points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle aux axes.

Appliquer cette méthode à la recherche de l'équation de la tangente aux courbes du 2e degré représentées par l'équation la plus générale.

9. L'angle de deux plans donnés par leurs traces.

Etant donné les traces d'un plan, les projections de l'intersection de ce plan avec un autre plan inconnu et l'angle des deux plans, déterminer les traces du 2e plan.

10. Le levier.

Déterminer les conditions d'équilibre entre la puissance et la résistance dans un système de leviers composés.

DEUXIÈME EXAMEN.

—

11. Ecrire le nombre cinq cent trente-quatre cent millièmes.

Combien faut-il de chiffres décimaux pour avoir des dix-millionnièmes.

Exposer la règle générale pour énoncer un nombre décimal écrit.

12. Exposer la théorie du contact de deux cercles.

Décrire avec un rayon donné un cercle tangent à un cercle donné et passant par un point donné.

Décrire un cercle tangent à un cercle donné en un point donné et à une droite donnée.

13*. Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle tel que la somme de la base et de la hauteur soit égale à une longueur donnée.

Déterminer par le calcul la longueur du côté du triangle isocèle demandée.

Résoudre le problème par une construction géométrique.

14. Etant donné les tangentes de deux arcs, trouver la tangente de leur somme.

Déterminer la tangente de la moitié d'un arc connaissant la tangente de cet arc.

Calculer la tangente de l'arc $\frac{\pi}{8}$.

15*. Déterminer la surface d'une triangle en fonction des coordonnées des trois sommets.

Examiner le cas particulier où l'un des sommets est à l'origine.

16. Exposer la méthode pour trouver les racines commensurables des équations numériques.

Cette méthode s'applique-t-elle aux équations littérales?

17. Discuter la courbe

$$(y-1)(x+1)-2(x+2)=0.$$

Si l'on construit l'hyperbole à l'aide des asymptotes, démontrer les propriétés de cette courbe par rapport aux droites.

18*. Méthode générale pour trouver le centre des courbes algébriques.

Appliquer la méthode générale à la recherche du centre des courbes du 2e degré.

19. Trouver les projections de l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre.

Déterminer en toute grandeur la distance de la ligne de terre à la droite intersection des deux plans donnés.

20. Trouver la résultante de deux forces parallèles et dirigées 1° dans le même sens, 2° en sens inverse.

—

TROISIÈME EXAMEN.

---

21. Exposer la théorie de la multiplication des nombres entiers.

Démontrer tous les théorèmes qui s'y rapportent.

Comment se fait la preuve de la multiplication?

22. Qu'est-ce que le mètre?

Convertir $3^{t}\ 5^{pi}\ 8^{po}$ en mètres, à un centimètre près.

23. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une circonférence passe par quatre points donnés?

Démontrer que, lorsque le quadrilatère formé par la jonction des quatre points est tel, que la somme des angles opposés est égale à deux droits, les quatre points sont sur une même circonférence.

24*. Calculer le diamètre d'une sphère d'un poids donné, sachant que le poids d'un corps quelconque est égal au produit du volume par la densité.

Déterminer le diamètre d'une sphère donnée.

Connaissant la distance à laquelle on peut apercevoir de la mer le sommet d'un phare d'une hauteur connue, comment pourrait-on en conclure approximativement la grandeur du rayon de la terre, supposée sphérique?

25*. Mener un plan tangent à trois sphères données.

Par un point donné mener un plan tangent à deux sphères données.

Par deux points donnés mener un plan tangent à une sphère.

26*. Discuter et construire la courbe

$$y^2 - 2xy + x^2 - 4y = 0.$$

27*. Méthode générale pour trouver les diamètres des courbes.

Appliquer la méthode générale à la recherche des diamètres dans les courbes du 2e degré.

28. Etant donné la tangente d'un arc, calculer la tangente du tiers de cet arc.

Démontrer que les trois racines sont réelles.

Examiner le cas particulier de l'arc égal au quart de la circonférence.

29. Déterminer l'angle de deux droites données par leurs projections.

Etant donné les projections d'une droite et l'angle qu'elle forme avec une horizontale en un point donné, déterminer les projections de cette horizontale.

30. Trouver la résultante de deux forces non parallèles situées dans un même plan (parallélogramme des forces).

Un point matériel emporté suivant une droite avec une vitesse donnée est tout à coup détourné de sa direction primitive par une force perpendiculaire à cette direction : quelle doit être le rapport des deux vitesses pour que le point matériel suive une direction intermédiaire?

Déterminer, dans le cas général, la direction du second mouvement, connaissant les vitesses v et v'.

—

QUATRIÈME EXAMEN.

---

31. Enoncer et démontrer la règle de la multiplication des nombres décimaux.

Déterminer les limites de l'erreur que l'on peut commettre lorsqu'on multiplie entre eux deux nombre décimaux approximatifs.

32*. Extraire à $\frac{1}{8}$ près la racine carrée de $3\frac{1}{2}$.

33*. Trouver la surface d'un triangle en fonction des trois côtés, par la simple géométrie.

Déterminer le maximum de tous les triangles qui ont un même contour et un côté égal.

34. La surface de la sphère.

Calculer la surface du solide produit par la révolution d'un hexagone régulier autour d'un de ses axes, en fonction du rayon du cercle circonscrit.

35. La somme des termes d'une progression par différence.

Connaissant le premier terme, la raison et la somme des termes d'une progression par différence, déterminer le nombre des termes.

36. Etant donné le cosinus d'un arc, calculer le sinus de la moitié de cet arc.

Déterminer, d'après cette formule, le sinus de l'arc $\frac{\pi}{8}$.

37*. Discuter et construire la courbe

$$y^2-6xy+9x^2-2x=0.$$

Déterminer la direction de l'arc de la parabole par le calcul, par la construction géométrique.

38*. Exposer la méthode générale pour la discussion des courbes planes représentées par des équations algébriques à deux variables.

39. Etant donné la projection horizontale d'un point situé sur un plan donné par ses traces, trouver la projection verticale de ce point et son rabattement sur le plan horizontal ou vertical de projection.

Étant donné la trace horizontale d'un plan, et les projections horizontale et verticale d'un point du plan, déterminer la trace verticale.

40. Le centre de gravité de la surface du triangle.

Par un point donné mener une droite qui partage la surface d'un triangle donné en deux parties équivalentes.

—

CINQUIÈME EXAMEN.

---

41. Exposer la règle de la division des nombres entiers.
Un nombre impair peut-il être divisible par un nombre pair ?
Le contraire est-il vrai ?

42*. Partager le nombre 690 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$.

43*. Théorie des triangles semblables. Combien faut-il de conditions pour déterminer la similitude de deux triangles ?
Si deux triangles ont leurs surfaces dans le rapport des carrés de deux côtés, les triangles sont-ils semblables?

44. La surface du tronc de cône.
Partager la surface d'un tronc de cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle aux deux bases.

45. Etant donné le sinus et le cosinus de deux arcs, calculer le sinus de la différence de ces arcs ; démontrer la formule.

46. Réduire $\sqrt{5}$ en fraction continue.
Réduire en fraction continue les irrationnelles de la forme $\sqrt{a^2+1}$.

47. Théorie des racines égales.

Quelle est la condition nécessaire pour qu'un polynome

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s$$

soit une quatrième puissance exacte ?

48*. Discuter la courbe

$$y^2-bxy+x^2=2a$$

selon les différentes valeurs de a et de b.

49. L'angle d'une droite et d'un plan (géométrie descriptive).

On supposera que le plan donné est confondu avec le plan horizontal ou le plan vertical de projection ; que le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

50. Trouver le poids d'un corps avec une balance inexacte ; méthode des doubles pesées.

Etant donné une balance inexacte (dont les deux bras sont inégaux), on pèse successivement le même corps dans chacun des plateaux, et l'on trouve des poids différents p et p' : déterminer le rapport entre les longueurs des deux bras de la balance.

SIXIÈME EXAMEN.

—

51. Si l'on multiplie un nombre de m chiffres par un nombre de n chiffres, combien de chiffres, au plus et au moins, le produit doit-il avoir?

52. Trouver à $\frac{1}{7}$ près la racine cubique de 25.

53*. Les trois côtés d'un triangle sont

$$a=20^{m}$$
$$b=15$$
$$c=18\,;$$

de quelle espèce est l'angle A, opposé au côté a; démontrer le théorème.

Déterminer par le calcul la longueur de la droite qui joint le sommet A avec le milieu du côté opposé.

54. Le tronc de pyramide triangulaire.

Connaissant la base d'un tronc de pyramide triangulaire, la hauteur de la pyramide totale, et celle de la pyramide retranchée, déterminer le volume du tronc de pyramide.

55. Le binôme de Newton, dans le cas de l'exposant entier et positif.

Quel est le 7e terme du développement de $(3x-7)^{11}$?

Quel est le signe de ce terme?

56. Par un point extérieur à l'ellipse mener une tangente à la courbe.

Faire voir que le problème peut être ramené à l'intersection de deux ellipses.

Conclure de là la construction élémentaire de la tangente au cercle par un point extérieur.

57 *. Quel est le lieu géométrique des intersections successives des droites qu'on peut mener entre deux axes fixes donnés, de telle sorte que 1° la somme, 2° la différence des segments interceptés à partir de l'origine, soit égale à une longueur donnée?

58. Discuter la courbe

$$y^4 - x^4 = 1.$$

La courbe a-t-elle un centre? est-elle fermée? et dans cette hypothèse, entre quelles limites est-elle comprise?

59. Trouver les projections du point de rencontre d'une droite et d'un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

On supposera ensuite le plan donné parallèle successivement à chacun des plans de projection.

60. Le centre de gravité de la pyramide triangulaire.

Connaissant les deux bases et la hauteur d'un tronc de pyramide, déterminer son centre de gravité.

—

SEPTIÈME EXAMEN.

61. Multiplication des fractions ordinaires.

Dans quel cas le produit sera-t-il une fraction réduite? On supposera successivement que les fractions proposées sont à la fois réduites ou non à leur plus simple expression.

62. Qu'est-ce que le litre?

Combien pèse un litre d'eau distillée prise à son maximum de densité?

Combien pèse un mètre cube d'eau distillée?

Combien un mètre cube renferme-t-il de litres?

63. Le carré de l'hypoténuse.

On placera le triangle de manière que l'hypoténuse soit verticale. Dans la démonstration du carré de l'hypoténuse, la condition de l'angle droit est-elle introduite?

Démontrer réciproquement que, si le carré d'un des côtés d'un triangle est équivalent à la somme des carrés des deux autres, le triangle est nécessairement rectangle.

64. Trouver le rayon d'un cercle équivalent à la somme ou à la différence de deux cercles donnés.

65*. Etant donné deux points A et B sur la circonférence d'un cercle C, et la corde AB qui les joint, trouver sur cette même circonférence un troisième point M tel, qu'en menant le diamètre MCN, la partie MN de la sécante comprise entre le point M et la corde AB soit moyenne proportionnelle entre AM et BM (fig. 1).

66. Résoudre l'équation exponentielle

$$3^x = 5.$$

La valeur de x sera-t-elle rationnelle ?

A quelle réduite faudra-t-il s'arrêter pour que l'approximation soit à 0,01 près ?

67. Résoudre l'équation

$$p \sin(x+a) - q \cos(x-a) = r \sin x.$$

68*. Etant donné un système de diamètres conjugués de l'ellipse, déterminer les axes, de grandeur et de direction.

On démontrera les diverses propriétés de l'ellipse qui ont rapport à la construction géométrique.

69. Trouver l'angle que fait un plan, donné par ses traces, avec un des plans de projection.

Étant donné la trace verticale d'un plan et l'angle qu'il fait avec le plan vertical de projection, déterminer sa trace horizontale.

70. Le treuil.

Au lieu de supposer le treuil un cylindre à base circulaire, si on le supposait à base elliptique, quelles modifications le résultat en recevrait-il ?

HUITIÈME EXAMEN.

—

71. Diviser 3,5 par 0,438.

Le quotient sera-t-il fini? S'il est périodique, la période sera-t-elle simple ou mixte. Démontrer la règle générale.

72. Démontrer que la bissectrice d'un angle d'un triangle quelconque partage le côté opposé en deux segments dont le rapport est égal au rapport des côtés qui comprennent cet angle.

Déterminer la longueur de la bissectrice en fonction des côtés de l'angle et des segments qu'elle forme sur le côté opposé.

73. Diviser une ligne en moyenne et extrême raison. Qu'entend-on par ces mots?

Enoncer la problème d'une manière plus générale. Comment la solution géométrique satisfait-elle à l'énoncé le plus général?

74. Calculer le rayon de la base d'un cône droit dont on connaît la surface s et la hauteur h.

Si au lieu de la hauteur on donnait le côté, quelle serait la valeur du rayon de base?

75 *. Etant donné un système de diamètres conjugués de l'hyperbole, construire les axes.

Démontrer les propriétés sur lesquelles repose la construction géométrique.

76 . D'un point pris à volonté sur l'axe d'une courbe du deuxième degré on mène des sécantes quelconques, et, par le point d'intersection de ces sécantes avec la tangente au sommet de la courbe, des parallèles à l'axe, qui rencontrent généralement la courbe en un ou deux points; enfin on joint ces points d'intersection avec le sommet. Quel est le lieu géométrique des points de rencontre de ces droites de jonction avec les sécantes correspondantes?

77*. Déterminer le lieu géométrique des sommets des triangles de même base et tels que les angles à la base soient dans le rapport de 1 à 3.

78*. Discuter la courbe

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - 1}.$$

Déterminer le diamètre, les asymptotes, etc.

79. Etant donné les projections de trois points quelconques dans l'espace, déterminer le plan et le triangle formé par la jonction de ces points deux à deux.

Si l'un des points était situé sur l'un des plans de projection?

Enfin si deux points étaient situés chacun sur un des plans de projection?

80. Démontrer que deux forces non situées dans un même plan n'ont pas de résultante.

Peut-on les réduire à une force et à un couple? Et, dans cette hypothèse, la force est-elle parallèle au plan du couple?

NEUVIÈME EXAMEN.

—

81. Qu'est-ce que l'arithmétique ?
Qu'est-ce qu'un nombre ?
Qu'est-ce que le gramme ?
De quelle fraction du litre d'eau distillée est-il le poids ?

82. Quelle est la somme dont l'intérêt simple au taux t pendant n années, ajouté avec le capital, a produit une somme a ?
Quelle est la somme dont l'intérêt composé, ajouté au capital pendant n années, a produit une somme a, le taux étant le même ?

83. La somme des trois angles d'un triangle rectiligne est toujours égale à deux angles droits.
Quelle est la somme de tous les angles d'un polygone de n côtés ?
Si l'on prolonge les côtés du polygone dans le même sens, à quoi est égale la somme des angles extérieurs ?

84. La somme des trois angles d'un triangle sphérique est-elle égale à deux angles droits ? Entre quelles limites est-elle comprise ?

85. Etant donné deux polygones, en construire un troisième semblable au premier et équivalent 1° au second, 2° à la somme ou à la différence des deux premiers.

86*. Trouver les quantités dont le carré a pour expression.

$$25-86\sqrt{-1}.$$

La solution du problème se ramènant à la résolution de deux équations du deuxième degré, déterminer les inconnues par l'intersection des deux courbes.

87 *. Etant donné la directrice, le foyer correspondant et une tangente, déterminer la courbe du deuxième degré.

Dans quel cas la courbe sera-t-elle une ellipse, une hyperbole ou une parabole?

88 *. D'un point donné B sur la circonférence d'un cercle on mène des cordes telles que BF; ensuite, par le milieu D des arcs sous-tendus, on mène des parallèles telles que DEG au diamètre passant par B. Quel est le lieu géométrique des points d'intersection E des sécantes BF et des parallèles correspondantes DEG?

89. Déterminer l'angle de deux droites données par leurs projections.

Examiner le cas particulier où l'une des droites données est perpendiculaire à un des plans de projection.

90. Qu'est-ce qu'un couple? Son effet?

Une force unique peut-elle faire équilibre à un couple?

Comment mesure-t-on les intensités des couples?

Changer un couple en un couple équivalent dont le bras de levier est donné.

—

DIXIÈME EXAMEN.

—

91. Qu'est-ce qu'un rapport?

Combien de sortes de rapports?

Démontrer que, dans une suite de rapport égaux par quotient, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.

92. Démontrer que deux triangles sont équivalents lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

Démontrer que deux triangles sont équivalents lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés dont le rectangle est égal.

93*. Etant donné deux points A et B (fig. 4) sur la circonférence d'un cercle, trouver sur cette même circonférence un point C tel, qu'ayant mené AC, BC et BD perpendiculaires sur AC, on ait la relation

$$AD + BD = BC + CD.$$

94. Comment mesure-t-on l'angle de deux plans? Démonstration.

Au lieu de l'angle rectiligne formé par les perpendiculaires élevées en un même point de la commune intersection des plans, ne pourrait-on pas considérer l'angle rectiligne formé par des obliques faisant avec la commune intersection des angles déterminés et constants?

95. Etant donné deux côtés d'un triangle et l'angle compris, calculer le côté opposé.

Transformer la formule en une autre à laquelle le calcul logarithmique puisse s'appliquer.

96. Démontrer que, si a est racine d'une équation, le premier membre sera divisible par $x-a$.

97 *. Etant donné le paramètre, le sommet et un point, déterminer la parabole.

98*. Discuter et construire la courbe

$$y^2-4xy+x^2-6=0.$$

Par le point

$$x=2,$$
$$y=9,$$

mener une tangente à la courbe.

99. La distance de deux points donnés par leur projection.

Si les deux points étaient situés chacun sur un des plans de projection ?

Etant donné la distance de deux points, les projections de l'un de ces points et seulement la projection horizontale de l'autre, trouver sa projection verticale.

100. Démontrer qu'un couple peut être transporté dans son plan ou dans un plan parallèle, sans que son effet en soit changé.

—

ONZIÈME EXAMEN.

101. Qu'est-ce que la numération ?

Qu'entend-on par la base d'un système de numération ? Combien faut-il de caractères différents pour représenter tous les nombres possibles dans un système quelconque de numération dont la base est *b* ?

102. Exprimer le nombre 425 dans le système duodécimal.

Quelle est la base du système de numération dans lequel le nombre 324 est exprimé par 642 ?

103. La règle de la divisibilité par 9. Cette règle s'applique-t-elle à tout système de numération ?

Preuve par 9 de la multiplication et de la division.

Démontrer que, si l'on intervertit l'ordre des chiffres d'un nombre donné, le nombre résultant ajouté au nombre proposé donne une somme divisible par 9.

Même résultat pour la soustraction et pour la multiplication.

104. Diviser une longueur donnée en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de deux carrés donnés.

105*. Etant donné un cercle O et une perpendiculaire BF sur un diamètre donné, trouver sur cette perpendiculaire un point F tel que la tangente FC, menée de ce point à la circonférence, soit égale à la distance CH du point de contact au diamètre. (fig. 5.)

106. Former l'équation aux carrés des différences des racines d'une équation proposée.

Appliquer la méthode générale à l'équation du 3e degré

$$x^3+px+q=0.$$

Déterminer, d'après l'équation aux carrés des différences, la condition de réalité des trois racines de l'équation proposée.

107. Etant donné les équations de deux droites

$$y=ax+b,$$
$$y=a'x+b',$$

calculer le sinus de l'angle de ces droites, les coordonnées étant obliques.

108*. Etant donné le foyer, une tangente et un point, déterminer la parabole.

109. Etant donné la trace horizontale d'un plan et les projections d'un point de ce plan, trouver sa trace verticale.

Etant donné les projections horizontale et verticale de deux points d'un plan et un point de la trace horizontale de ce plan, déterminer sa trace verticale.

110. Trouver les conditions d'équilibre d'un système de trois forces convergentes en un même point et situées dans un même plan.

Examiner le cas où les trois forces sont égales.

DOUZIÈME EXAMEN.

—

111. Qu'est-ce qu'une fraction? ordinaire, décimale.

Convertir la fraction $\frac{3}{7}$ en une autre fraction équivalente dont le dénominateur soit 42.

Décomposer la fraction $\frac{3}{7}$ en deux autres fractions dont les dénominations soient 7 et 56. Combien de solutions?

112. Lorsqu'on ajoute le même nombre aux deux termes d'une fraction, la valeur de la fraction change-t-elle?

Dans quels cas la fraction modifiée devient-elle plus grande ou plus petite?

113. Par un point donné mener une perpendiculaire à une droite donnée.

On supposera ensuite le point situé en dehors de l'extrémité de la droite qu'on ne peut prolonger.

Comment peut-on résoudre le problème à l'aide de la propriété du triangle rectangle?

114. Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné.

Par un point donné mener une droite qui fasse un angle donné avec un plan donné.

Combien de solutions?

115. La règle des signes de Descartes.

116. Résoudre l'équation

$$3x^4-7x^3+8x^2-7x+3=0.$$

117*. Etant donné un foyer, la directrice correspondante et une tangente, déterminer l'ellipse.

Faire voir que la connaissance d'un foyer équivaut à deux conditions.

118*. Etant donné une asymptote, un sommet et l'excentricité, déterminer l'hyperbole.

Comment la connaissance d'une asymptote équivaut-elle à deux conditions ?

119. La distance d'un point donné par ses projections à un plan donné par ses traces.

Si le point était situé sur l'un des plans de projection ?

Étant donné la trace horizontale d'un plan, les projections horizontale et verticale d'un point et la distance de ce point au plan, déterminer la trace verticale de ce plan.

120. Un point est sollicité par deux forces représentées par les nombres 3 et 5, faisant entre elles un angle de 45° ; calculer la direction et la grandeur de la résultante.

—

TREIZIÈME EXAMEN.

—

121. Qu'entend-on par la division des fractions ordinaires? Enoncer et démontrer la règle.

122. Qu'entend-on par logarithme d'un nombre? Faire voir que les définitions des logarithmes en arithmétique et en algèbre sont identiques.

123. Par trois points donnés faire passer une circonférence.

Déterminer par le calcul le rayon de la circonférence qui passe par trois points donnés.

124*. Démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites qui se coupent à son pied dans le plan.

Par un point situé dans un plan donné élever une perpendiculaire à ce plan.

125. La limite de la somme de tous les termes d'une progression par quotient décroissante à l'infini.

Appliquer la formule à la conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires.

Connaissant l'erreur que l'on commet en prenant la somme d'un certain nombre donné de termes pour la somme de tous les termes d'une progression décroissante, dont le premier terme ainsi que la raison sont donnés, déterminer le nombre des termes qu'on a négligés.

126. Connaissant la tangente d'un arc, calculer le sinus du double de cet arc.

Déterminer l'arc dont la tangente est égale à la somme du sinus et du cosinus.

127*. Le lieu géométrique des foyers de toutes les paraboles qui ont même directrice et un point commun ; démontrer la propriété.

Etant donné les asymptotes et une tangente, déterminer l'hyperbole.

Démontrer que l'asymptote est la limite des tangentes à l'hyperbole.

128*. Le lieu géométrique des projections du sommet de la parabole sur toutes ses tangentes.

129. Construire la distance de deux plans parallèles donnés par leurs traces sur les plans de projection.

Étant donné les traces d'un plan et la trace horizontale d'un second plan parallèle au premier avec la distance des deux plans, déterminer la trace verticale du second plan.

130. La résultante d'un système quelconque de forces situées dans un même plan et concourant en un même point.

Démontrer que, de quelque manière que l'on forme le polygone, on arrivera constamment à un seul et même résultat.

—

QUATORZIÈME EXAMEN.

---

131. Qu'est-ce qu'une fraction continue?

Comment réduit-on une fraction ordinaire en fraction continue ?

Quelle est l'utilité de cette réduction ?

132. Démontrer que la valeur d'une réduite quelconque s'approche plus de la valeur de la fraction proposée que toute autre fraction qui serait exprimée par des termes plus simples.

133. Décrire un cercle tangent à une droite donnée et à un autre cercle donné en un point donné de la circonférence.

Décrire un cercle tangent à une droite et à un cercle donné et passant par un point donné.

134. Partager la circonférence d'un cercle donné en 40 parties égales.

Comment déterminer par le calcul le sinus de l'arc $\frac{2\pi}{40}$?

135. Etant donné les trois côtés d'un triangle, calculer les angles.

Si l'on se sert de la formulle du cosinus en fonction des côtés, convertir la formule en une autre à laquelle le calcul logarithmique puisse s'appliquer.

136*. Etant donné un cercle C et une tangente AT en un point donné A de la circonférence, on mène par le centre des sécantes telles que CBD, qui rencontrent la circonférence en B et la tangente en T; ensuite par les points D on mène des perpendiculaires à la tangente, sur lesquelles on prend des longueurs DM = DB : quel est le lieu géométrique des points M ? (Fig. 7.)

137*. Connaissant une asymptote, un foyer et une tangente, décrire l'hyperbole.

138*. Etant donné un cercle C et une tangente BT, de l'extrémité A du diamètre AB, perpendiculaire à la tangente, on mène des sécantes en nombre quelconque, telles que AM'N, rencontrant la circonférence en M' et la tangente en N, et sur chacune desquelles on porte, à partir du point fixe A, une longueur AM égale à la partie M'N comprise entre la circonférence et la tangente : quel est le lieu géométrique des points M ? (Cissoïde de Dioclès.) (Fig. 8.)

139. D'un point donné par ses projections mener une perpendiculaire à une droite donnée, et déterminer la distance du point à la droite.

Les projections de deux droites perpendiculaires sont-elles perpendiculaires?

Dans quelle position des droites par rapport aux plans de projection les projections sont-elles perpendiculaires?

140. Le centre de gravité du trapèze.

Examiner les cas particuliers où le trapèze se change en triangle, en parallélogramme.

QUINZIÈME EXAMEN.

—

141. Qu'est-ce que l'addition?

Pourquoi ne fait-on pas l'addition des nombres entiers en commençant par la droite ?

Ne pourrait-on pas commencer par la droite, et en général par une colonne quelconque?

Comment se fait la preuve de l'addition?

142. Extraire la racine carrée de 12,5 à 0,1 près.

Calculer la limite de l'erreur que l'on peut commettre en prenant pour sa valeur exacte la racine carrée d'un nombre décimal approximatif.

143. D'un point donné sur une droite élever une perpendiculaire à cette droite. Si le point donné était à l'extrémité de cette droite qu'on ne peut prolonger?

144. Etant donné les surfaces des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés quelconque, calculer les surfaces des polygones inscrits et circonscrits d'un nombre double de côtés.

Calculer la surface de l'hexagone régulier, du triangle équilatéral et du dodécagone inscrits et circonscrits.

145. Etant donné une équation numérique quelconque, comment peut-on s'assurer du nombre de racines réelles comprises entre deux limites données? (Théorème de Sturm.)

Comment peut-on déduire de ce théorème le nombre de racines réelles d'une équation?

146. Etant donné le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe, déterminer l'ellipse.

Démontrer que la distance du centre de l'ellipse au pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur une tangente quelconque est égale au demi-grand axe.

147*. Etant donné un point fixe A et une droite HK, on mène par ce point des sécantes en nombre quelconque, telles que ANM rencontrant la droite en N, et sur chacune desquelles on porte une longueur constante $NM = l$: quel est le lieu géométrique des points M ? (Conchoïde de Nicomède) (fig. 9).

148*. Le lieu géométrique des sommets des paraboles qui ont même foyer et une tangente commune.

149. Par un point donné par ses projections mener un plan parallèle à un plan donné.

Si le plan donné était parallèle à la ligne de terre ?

150. Déterminer les conditions d'équilibre d'un corps pesant qu'une force empêche de glisser le long d'un plan incliné.

Examiner les cas particuliers où la force est parallèle, normale, au plan incliné.

Connaissant le poids du corps et l'angle qui fait le plan incliné avec l'horizon, déterminer la force avec laquelle le corps tend à glisser le long du plan incliné.

SEIZIÈME EXAMEN.

—

151. Qu'entend-on par diviseur d'un nombre ?

Par diviseur commun à deux ou plusieurs nombres ?

Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

152. Former le plus grand commun diviseur de deux nombres par la méthode des facteurs premiers.

153. Inscrire un carré donné dans un autre carré donné.

Quel est le plus grand carré qu'on peut inscrire dans le second ?

154. Calculer à 0,01 près la valeur

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}.$$

155*. Bissection d'un hémisphère par un plan parallèle à la base.

156*. L'équation finale à laquelle conduit la question précédente

$$x^3-3x+1=0$$

a-t-elle toutes ses racines réelles ?

Combien y a-t-il de racines qui satisfont à la question ?

Trouver cette racine par la méthode de Lagrange.

157*. Etant donné deux circonférences, on mène à l'une d'elles des tangentes qui coupent la seconde en deux points, par lesquels on mène à celle-ci des tangentes, qui se rencontrent généralement : quel est le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes ?

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu géométrique soit une parabole ?

Le lieu géométrique peut-il être un cercle ?

158*. Trouver dans le plan d'une ellipse donnée deux points tels que la somme de leurs distances à un point quelconque de la courbe soit constante. Déterminer cette somme.

Connaissant la somme des axes de l'ellipse et les foyers, déterminer la courbe.

159. Par une droite donnée, par ses projections, mener un plan perpendiculaire à un autre plan donné par ses traces.

Comment modifier la construction lorsque la droite donnée est parallèle à la ligne de terre ?

Enfin on supposera la droite et le plan donné tous deux parallèles à la ligne de terre.

160. La vis.

Exprimer les conditions d'équilibre.

Si la vis est mobile et l'écrou fixe, comment déterminer la force de pression de la vis ?

—

DIX-SEPTIÈME EXAMEN.

—

161. Enoncer le nombre 42,8013.

Convertir ce nombre décimal en fraction ordinaire, et celle-ci en fraction continue.

162*. Convertir 23° 31′ 30″, en grades et parties du grade.

163. La surface du trapèze.

Partager le trapèze en deux parties équivalentes par une parallèle aux bases.

164. Démontrer que deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes ont même volume.

Démontrer que deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

Quelle est la condition la plus générale pour que deux pyramides soient équivalentes?

165. Comment reconnaît-on qu'une équation est réciproque?

Résoudre l'équation $x^5-1=0$, en appliquant la méthode des équations réciproques.

166*. Des extrémités du grand axe d'une ellipse on mène des perpendiculaires à deux cordes quelconques supplémentaires s'appuyant sur cet axe: quel est le lieu géométrique des points de rencontre de ces perpendiculaires?

167*. Trouver le lieu géométrique des points milieux de toutes les cordes menées à une courbe quelconque du 2e degré par un point quelconque pris dans son plan.

168*. Etant donné une asymptote, un point et la longueur des axes, déterminer l'hyperbole.

169. Etant donné les traces d'un plan, la projection horizontale d'une droite située sur ce plan, et un point de sa projection verticale, trouver cette projection.

Déterminer l'angle que la droite fait avec le plan horizontal des projections et avec la trace horizontale du plan donné.

170. Le centre de gravité du périmètre du trapèze.

Après avoir déterminé le centre de gravité du périmètre par la construction géométrique, on le déterminera par le calcul en fonction des bases et de la hauteur du trapèze.

DIX-HUITIÈME EXAMEN.

171. Démontrer que tout nombre qui divise un produit de deux facteurs, et qui est premier avec un des deux facteurs, divise nécessairement l'autre facteur.

Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs divise-t-il nécessairement un des facteurs?

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre divise à la fois la somme et le produit de deux facteurs?

172. Décomposer un nombre en ses facteurs premiers.

Quel est le nombre de ses diviseurs?

Quelle est la somme de tous les diviseurs de ce nombre?

173. La surface d'un polygone régulier.

Déterminer la surface de l'octogone régulier en fonction du côté.

174. Exprimer la surface d'un polygone régulier en fonction du côté et de l'angle.

175. Déterminer la constante a dans l'équation

$$x^3-4x^2+ax+6=0$$

par la condition que 2 soit une de ses racines, et trouver les deux autres racines de l'équation.

176*. Mener une tangente commune à deux cercles donnés.

177*. Déterminer par une construction graphique les points d'intersection d'une droite donnée et d'une quelconque des trois courbes du 2ᵉ degré donnée, sans construire la courbe.

On examinera successivement les cas de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

178*. Connaissant le centre d'une ellipse, un point de la courbe, un diamètre et la direction de son conjugué, déterminer la grandeur de ce diamètre et construire la courbe.

Étant donné le centre et trois points de l'ellipse, déterminer la courbe.

La solution de ce problème se ramène aisément au premier à l'aide de la propriété des polaires.

Démontrer que, si d'un point pris sur un diamètre donné d'une ellipse on mène des sécantes qui coupent chacune la courbe en deux points, les droites de jonction directe et réciproque de ces points avec les extrémités du diamètre se coupent suivant une seule et même droite parallèle au conjugué du diamètre donné.

179. Déterminer l'angle de deux plans dans le cas où ces deux plans ont une trace commune.

180. La poulie fixe et la poutre mobile.

Déterminer les conditions d'équilibre dans les deux cas.

DIX-NEUVIÈME EXAMEN.

---

181. Démontrer qu'on ne change pas la valeur d'une fraction quand on divise ses deux termes par un même nombre.

Utilité de ce principe dans la simplification des fractions.

Appliquer le principe à la fraction $\frac{225}{360}$.

182. Démontrer que deux fractions ordinaires ne peuvent être équivalentes que si elles sont réductibles à l'identité.

Démontrer que toute puissance d'une fraction ordinaire réduite à sa plus simple expression est elle-même une fraction réduite.

183. Qu'est-ce qu'un prisme ? droit, oblique ?

Démontrer que deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

184. La surface du triangle sphérique.

Dans un triangle sphérique tracé sur une sphère dont le rayon est de 3 mètres, les angles A, B, C, sont de 120, 85, 75°: exprimer la surface du triangle.

185. La somme des puissances semblables des termes d'une progression par différence.

Appliquer la formule générale à la somme des carrés des dix premiers nombres impairs de la suite naturelle.

186*. Etant donné les deux foyers et un point de l'ellipse, déterminer la courbe.

187*. Etant donné une ellipse dont le grand diamètre est constant et le petit variable, et un point sur la direction de ce dernier, on mène par ce point une normale à la courbe : quel est le lieu géométrique des points d'intersection de la normale et de l'ellipse.

188. Discuter et construire la courbe

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^3-5x+4}{x^2-4x+4}}.$$

Rechercher les asymptotes, les tangentes parallèles aux axes coordonnés, etc.

189. Quel est le but de la géométrie descriptive?
La position d'un point de l'espace est-elle réellement déterminée par ses projections?
Comment détermine-t-on la position d'une ligne quelconque, droite ou courbe, à l'aide des projections?

190. Le centre de gravité d'un système de deux sphères de même nature, et de rayons r et r', dont les centres sont distants d'une longueur d.
Le centre de gravité d'un système de trois sphères pesantes égales, homogènes entre elles.

—

VINGTIÈME EXAMEN.

—

191. Convertir 3,45 en fraction continue; démontrer que la somme ou la différence de deux fractions décimales périodiques est elle-même une fraction périodique.

192. Démontrer la propriété des sécantes au cercle, issues d'un point soit intérieur soit extérieur.

Quel est le lieu géométrique des points tels que, menant par chacun d'eux des sécantes à un cercle donné, le rectangle des segments soit d'une surface donnée ?

193. Dans quel cas la valeur de x, dans une équation exponentielle

$$a^x = b$$

est-elle rationnelle ?

Quels sont les nombres dans le système décimal dont les logarithmes sont rationnels ?

194*. Déterminer les trois côtés d'un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés par trois nombres consécutifs.

195*. Déterminer le lieu géométrique des seconds foyers des ellipses ayant un même foyer et deux points communs.

Construire l'ellipse, connaissant un foyer et trois points de la courbe.

196*. Trouver le lieu géométrique des seconds foyers des ellipses ayant un même foyer et deux tangentes communes.

Construire l'ellipse, connaissant un foyer et trois tangentes.

197*. Dans l'ellipse et l'hyperbole le rectangle des segments d'une tangente quelconque, compris entre le point de contact et les points où elle est coupée par les axes, est égal au carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point de contact.

Cette propriété n'est pas particulière aux axes de la courbe, elle s'applique également à deux diamètres conjugués quelconques.

198. Discuter et construire la courbe

$$y^3 + x^3 = 1.$$

La courbe a-t-elle un centre ?

199. L'angle de deux droites ;

Quand l'une d'elles est située dans un des plans de projection ;

Lorsque chacune d'elles est tracée dans un des plans de projection, soit que leurs projections concourent ou non.

200. Composition des couples agissant dans des plans parallèles.

Composition des couples agissant dans des plans non parallèles.

Comment la composition des couples se ramène-t-elle à la composition des forces agissant en un même point ?

VINGT-ET-UNIÈME EXAMEN.

—

201. Additionner les fractions

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{8}{11}.$$

Quel est le plus petit dénominateur commun auquel on puisse réduire les fractions?

202. Qu'est-ce que la règle de société ?

Trois personnes, A, B, C, ont fait un fonds commun :

A	a mis en société	a	francs pendant	n	années,	
B	—	b	—	n'	—	
C	—	c	—	n''	—	

la somme à partager est S; quelle part revient-il à chacun?

203. Trouver la valeur de x, qui rend maxima ou minima la valeur de la fonction

$$\frac{x-3}{17-x^2}.$$

204. Qu'est-ce que la sphère ?

L'intersection de deux sphères.

205*. Déterminer les côtés d'un triangle dont les trois côtés et la surface sont réprésentés par quatre nombres consécutifs.

206*. Déterminer le lieu géométrique : 1° des foyers; 2° des sommets de toutes les paraboles qui ont même directrice et même tangente; 3° former l'équation générale des paraboles qui répondent à l'énoncé.

207*. Déterminer l'ellipse, connaissant le centre, deux points et une tangente.

Comment la connaissance du centre équivaut-elle à deux conditions?

Démontrer que les diamètres menés parallèlement aux côtés d'un parallélogramme inscrit dans l'ellipse forment un système de diamètres conjugués.

Exprimer la distance du centre au point où la tangente rencontre un diamètre en fonction de la longueur de ce demi-diamètre et de l'abscisse du point de contact.

208*. Etant donné une asymptote, un foyer et une tangente, déterminer l'hyperbole.

209. La distance d'un point à une droite donnée par ses projections.

On placera le point sur la ligne de terre et la droite parallèle à cette ligne.

210. Déterminer le centre de gravité du système composé d'un cylindre, de rayon r et de hauteur h, et d'une sphère homogène de rayon R.

Si les deux corps ne sont pas homogènes?

Au lieu d'une sphère entière, on supposera une demi-sphère, ajustée base à base avec le cylindre.

VINGT-DEUXIÈME EXAMEN.

—

211. Partager le nombre 30 en deux parties qui soient entre elles comme les nombres 2 et 3.

212. Le rayon perpendiculaire sur le milieu de la corde passe par le centre du cercle.

La droite qui joint le milieu de la corde et le milieu de l'arc passe par le centre.

213. Comment détermine-t-on par approximation le rapport constant de la circonférence au diamètre ?

Au lieu de déterminer la limite des surfaces des polygones inscrits et circonscrits, ne pourrait-on pas déterminer la limite des contours de ces polygones?

214. De quelle équation dépend la valeur de la fraction continue périodique suivante :

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}\;?$$

215. La tangente à la parabole menée par un point extérieur.

On supposera le point donné sur la directrice, et l'on déduira de la construction géométrique quelques propriétés importantes de la parabole.

216*. Connaissant le centre, deux tangentes et un point, déterminer l'ellipse.

Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme quelconque circonscrit à l'ellipse forment un système de diamètres conjugués.

217*. Etant donné la directrice, une tangente et son point de contact, déterminer la parabole.

218*. Le lieu géométrique des foyers des paraboles qui ont même sommet et une tangente commune.

219. La plus courte distance entre deux droites données par leurs projections.

Étant donné les projections d'une droite et la projection horizontale d'une autre droite ainsi que la plus courte distance de ces droites en grandeur et en projection, déterminer la projection verticale de la deuxième droite.

220. Le centre de gravité de la surface d'un quadrilatère quelconque.

On déterminera le centre de gravité en considérant le quadrilatère soit comme la somme, soit comme la différence de deux triangles faciles à déterminer en fonction des données.

VINGT-TROISIÈME EXAMEN.

---

221. Convertir la fraction ordinaire $\frac{5}{12}$ en fraction décimale.

La fraction décimale peut-elle être finie ?

Peut-on prévoir combien de chiffres décimaux elle doit avoir au plus dans la période ?

222. Partager un arc de cercle en deux parties égales.

Est-il nécessaire de connaître le centre de la circonférence à laquelle il appartient ?

223. Partager un arc de cercle en trois parties égales.

Dans quel cas la solution est-elle possible au moyen de la règle et du compas ?

Démontrer que si l'on partage la corde en trois parties égales, et qu'on mène du centre de l'arc des droites aux points de division, l'angle ou l'arc sous-tendus ne sont pas partagés en trois parties égales.

224. Résoudre le même problème trigonométriquement par la formule du sinus de l'arc sous-triple.

Démontrer que les trois racines de l'équation à laquelle on arrive sont réelles, par l'algèbre et par la géométrie.

225. La plus courte distance de deux points donnés sur la surface d'un cylindre.

Par les deux points donnés combien peut-on faire passer d'arcs d'hélices.

226*. Etant donné le centre et trois tangentes, déterminer l'ellipse.

227*. Trouver le lieu géométrique des sommets des paraboles qui ont même directrice et une tangente commune.

Faire voir que la connaissance de la directrice équivaut à deux conditions.

228. Discuter et contruire la courbe

$$y+x^3=1.$$

229. Représenter un tronc de pyramide triangulaire déterminé dont la base inférieure repose sur le plan horizontal de projection.

Déterminer les angles que font entre elles les arètes latérales.

230. Quelle force faudrait-il appliquer à l'extrémité d'un levier de 3 mètres pour soulever un poids de 500 kilogrammes?

Si l'on ne fait pas abstraction du poids du levier, quelle correction faudra-t-il apporter au résultat?

—

VINGT-QUATRIÈME EXAMEN.

—

231. Qu'est-ce que la règle d'escompte?

Qu'entend-on par escompte en dehors et escompte en dedans?

En quoi diffèrent ces deux manières de prendre l'escompte?

232. Démontrer que toute transversale parallèle à un des côtés d'un triangle partage les deux autres en segments proportionnels.

233. Déterminer la somme de tous les diviseurs d'un nombre.

Trouver un nombre entier qui soit égal à la somme de ses diviseurs, en supposant que ce nombre ne contienne que deux facteurs premiers, dont l'un à la première puissance.

234. Déterminer le nombre des termes d'une progression par différence dont on connaît le premier terme, la raison et la somme de tous les termes.

Déterminer le nombre des termes de la progression, connaissant le premier terme, la raison et la somme des carrés de tous les termes.

235*. Dans tout triangle rectiligne

1° Le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et le point de concours des trois hauteurs sont en ligne droite ;

2° Le centre de gravité partage la distance des deux autres points en deux parties dans le rapport de 1 à 2.

236*. Quelle est la plus courte distance de deux points pris sur la surface de la sphère ?

Connaissant la plus courte distance de deux points de la surface de la sphère donnée, déterminer la corde qui soustend l'arc de grand cercle, et sa distance au centre.

237*. Etant donné le foyer, le sommet et un point d'une courbe du deuxième degré, déterminer la courbe.

238*. Un cercle C, d'un rayon donné r, roule sur une droite fixe et donnée de position : trouver le lieu géométrique des différentes positions qu'occupe successivement un point donné M, pris au dedans ou au dehors du cercle mobile et invariablement fixé par rapport au centre de ce cercle.

(Equation générale des cycloïdes, en termes finis.)

239. Rabattre sur un des plans de projection un plan donné par ses traces.

Déterminer le rabattement d'un polygone donné sur le plan, connaissant les traces du plan et les projections horizontales des sommets.

240. Qu'entend-on par les mots *force*, *résultante*?

Comment le poids d'un corps est-il une force?

Par quel moyen mesurer cette force?

Développer la théorie du peson.

VINGT-CINQUIÈME EXAMEN.

—

241. Qu'est-ce qu'une proportion? Par quotient?

Démontrer que dans toute proportion par quotient le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Etant donné le produit des extrêmes, la différence entre la somme des extrêmes et celle des moyens, et la somme des carrés des quatre termes, déterminer les quatre termes en proportion par quotient.

242. Connaissant la surface et la différence de deux côtés contigus, construire le rectangle.

243. A quelle forme de l'équation du deuxième degré correspond la solution précédente?

Résoudre le problème 242 par l'algèbre et faire voir que la construction obtenue par le calcul est parfaitement la même que la construction de la solution géométrique élémentaire.

244. Toute équation du deuxième degré peut-elle être résolue par les intersections d'un cercle et d'une droite?

Toute équation du 2e degré peut-elle être résolue par les intersections de deux cercles?

245*. Etant donné un foyer, la directrice correspondante et un point de l'ellipse, déterminer la courbe.

Faire voir que la connaissance de la directrice équivaut à deux conditions.

246*. Etant donné une tangente quelconque à l'ellipse ou à l'hyperbole, si par le centre on mène deux diamètres conjugués quelconques, le rectangle des segments de la tangente compris entre le point de contact et les points de rencontre des diamètres avec elle est constant, et égal au carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point de contact, ou bien encore au rectangle des distances des foyers à ce même point de contact.

247. Discuter et construire la courbe

$$y^4+x^4=1.$$

248. Démontrer que les projections de deux droites parallèles sont parallèles elles-mêmes.

Etant donné les projections d'une droite et le point où une seconde droite parallèle à la première vient percer le plan horizontal de projection, déterminer les projections horizontale et verticale de la seconde droite.

249. Trouver le centre de gravité du contour d'une portion de polygone régulier.

250. Déduire de là le centre de gravité d'un arc de cercle*.

Déterminer la distance du centre de gravité d'un arc de cercle a de rayon r au centre du cercle.

---

* Voir les Problèmes de géométrie.

VINGT-SIXIÈME EXAMEN.

—

251. Qu'est-ce que le carré d'un nombre?

La racine carrée d'un nombre?

Extraire la racine carrée de 107584.

Si l'on divise un nombre carré par 3, quels sont les restes qu'on peut obtenir?

252. Extraire la racine carrée de $7+4\sqrt{3}$.

Exposer la règle générale pour l'extraction des quantités algébriques de la forme

$$a\pm\sqrt{b}.$$

253. Trouver deux nombres dont on connaît la somme s et la différence d.

Trouver deux nombres dont la différence, la somme et le produit, soient entre eux comme les nombres 2, 3 et 5.

254. Déterminer le volume d'un tétraèdre régulier en fonction du côté.

Déterminer le rayon de la sphère circonscrite en fonction du côté du tétraèdre régulier.

255*. Déterminer le côté d'un tétraèdre régulier en or, d'un prix donné p.

256*. Mener à une ellipse donnée une tangente telle que la partie comprise entre les axes soit d'une longueur donnée.

257*. Etant donné une ellipse et une hyperbole concentriques, ayant mêmes axes et dirigées dans le même sens, par tous les points de la première courbe on mène des tangentes, qui coupent généralement la seconde en deux points; par ces points on mène des tangentes à l'hyperbole, lesquelles se coupent deux à deux en un point: on demande le lieu géométrique de ces points de rencontre.

258*. Trouver le lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles qui ont une même directrice et un point commun.

259. Par un point donné par ses projections mener un plan perpendiculaire à une droite donnée.

On supposera ensuite le point donné sur la droite.

Déterminer le lieu géométrique de tous les points à égale distance de trois points donnés par leurs projections.

260. Le centre de gravité du secteur circulaire.

Connaissant l'arc a du secteur et le rayon r du cercle auquel il appartient, déterminer par le calcul la distance du centre de gravité du secteur au centre du cercle.

—

VINGT-SEPTIÈME EXAMEN.

---

261. Quel est le nombre qui, multiplié par 45, donne pour produit 5580.

262. Peut-on voir *à priori* que la division à laquelle conduit la question précédente se fera exactement?

Démontrer que tout nombre divisible par deux ou plusieurs facteurs premiers est divisible par leur produit.

Partager le nombre 23 en deux parties entières telles, qu'en divisant l'une par 2, l'autre par 3, la somme des quotients soit elle-même un nombre entier.

Combien de solutions?

263. Exposer et démontrer la règle de la division des polynomes algébriques.

264. Déterminer en hectares la surface d'un champ de forme trapézoïde dont les bases ont 1800 et 1000 mètres de longueur, la hauteur étant de 840 mètres.

Mener entre les deux bases d'un trapèze donné une droite d'une longueur donnée qui partage le trapèze en deux parties équivalentes.

265. Déterminer le poids de l'eau distillée, prise à son maximum de densité, contenue dans un seau de la forme d'un tronc de cône dont les cercles de base ont 3 et 5 décimètres de diamètre, et la hauteur 4 décimètres.

266*. Etant donné le centre d'une ellipse et trois points, déterminer la courbe.

Etant donné le centre d'une ellipse et trois points de la courbe, déterminer, au moyen de la règle et du compas, les points d'intersection d'une droite donnée et de l'ellipse, sans construire la courbe.

267*. Par le centre d'une ellipse donnée on mène un diamètre quelconque, et par un des foyers une corde conjuguée à ce diamètre : quel est le lieu géométrique des points d'intersection de ces cordes et des diamètres qui leur sont conjugués?

268. Discuter et construire la courbe

$$y=2x^2\pm\sqrt{1+x^2}.$$

269. Démontrer que le volume du solide engendré par la révolution d'un triangle autour d'un axe quelconque est égal à la surface du triangle multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Etant donné le volume du solide engendré par la révolution d'un triangle équilatéral autour d'un axe passant par un des sommets et faisant avec le côté adjacent un angle de 30°, déterminer le côté du triangle.

270. Etant donné trois points par leurs projections, déterminer les projections du centre de gravité du triangle formé par la jonction de ces points deux à deux.

—

VINGT-HUITIÈME EXAMEN.

—

271. Démontrer que la valeur d'une fraction ne change pas quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.

La valeur d'une fraction change-t-elle lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes?

272. Dans quel rapport doivent être les deux nombres qu'on peut ajouter aux deux termes d'une fraction sans changer sa valeur?

Déterminer la fraction telle, que si l'on ajoute à son numérateur le carré du numérateur lui-même, et au dénominateur le double de son carré, la fraction ne change pas de valeur.

273. Qu'est-ce que la géométrie? Son but?

Qu'entend-on par les dimensions d'un corps?

Démontrer que la surface d'un rectangle s'obtient en multipliant la base par la hauteur, c'est-à-dire par le produit de ses deux dimensions.

Construire sur une longueur donnée comme base un rectangle équivalent à un polygone donné.

274*. Etant donné la base d'un triangle, le rapport des deux autres côtés et la longueur de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent, déterminer le triangle 1° géométriquement; 2° par le calcul.

275. Trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation

$$7x+9y=100.$$

Déterminer directement une valeur convenable pour chaque inconnue et exprimer la valeur générale de ces inconnues.

276*. Etant donné le foyer, une asymptote et un point, déterminer l'hyperbole.

Démontrer que la distance du foyer à l'asymptote est égale au demi-axe transverse.

277*. Mener par le foyer d'une ellipse donnée une corde d'une longueur donnée.

278. Expliquer la construction des tables de sinus.

Comment a-t-on pu construire la table des cosinus et des tangentes, connaissant la table des sinus?

279*. Etant donné la directrice, une tangente et un point, déterminer la parabole.

Démontrer que la tangente à la parabole partage en deux parties égales l'angle que fait le rayon vecteur mené du foyer au point de contact avec la droite parallèle à l'axe menée par ce même point.

280. Le centre de gravité du segment circulaire.

—

VINGT-NEUVIÈME EXAMEN.

—

281. Qu'est-ce que la soustraction ?
Comment se fait cette opération ?
Pourquoi commence-t-on par la droite ?
Dans quel cas l'opération pourrait-elle se faire en commençant par une colonne quelconque ?

282. Soustraction des fractions ordinaires.
Si l'on augmente d'une unité le dénominateur d'une fraction quelconque, quelle est l'erreur que l'on commet en prenant la fraction modifiée au lieu de la fraction primitive.

283. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la hauteur.

284*. Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux autres côtés et une ligne droite sur laquelle le sommet doit se trouver.
Faire voir que le problème revient à celui-ci : Décrire un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés.

285. Former l'équation dont les racines soient les sommes deux à deux des racines de l'équation

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

286*. Etant donné deux droites quelconques, trouver le lieu géométrique des centres des cercles qui coupent chacune d'elles sous une corde d'une longueur donnée.

Examiner les cas particuliers où 1° les droites sont perpendiculaires, 2° les cordes doivent être égales.

287*. Etant donné deux courbes du 2e degré concentriques, de tous les points de l'une on lui mène des tangentes, qui coupent généralement l'autre en deux points, et par ces deux points on mène à celle-ci des tangentes, qui se rencontrent deux à deux en un point : on demande le lieu géométrique de ces derniers points de rencontre.

288*. Etant donné la directrice et deux tangentes, déterminer la parabole.

Démontrer que toute tangente à la parabole divise en deux parties égales l'angle que fait la directrice avec le rayon vecteur mené du foyer au point où la tangente rencontre la directrice.

289. Etant donné une droite par ses projections, déterminer les projections d'une seconde droite parallèle à la première, connaissant la distance de ces droites et la projection horizontale d'un de ses points.

290. Quelle est la condition d'équilibre d'un corps pesant s'appuyant par deux points sur deux plans inclinés.

—

TRENTIÈME EXAMEN.

---

291. Qu'est-ce qu'une progression par différence?

Démontrer que, dans toute progression par différence, la somme de deux termes quelconques à égale distance des extrêmes est constante et égale par conséquent à la somme des extrêmes.

292. Démontrer que, si l'on a

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}, \text{ etc.},$$

on aura aussi

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\text{ etc.}}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\text{ etc.}}}$$

293. Par un point donné mener une sécante qui partage la circonférence d'un cercle donné en deux parties égales.

Si l'on demandait de mener par le point donné une sécante qui partageât la circonférence en deux parties dans un rapport donné $\frac{m}{n}$?

294. Par deux points donnés mener à un même point d'une droite donnée des sécantes également inclinées sur elle.

Angle d'incidence; angle de réflexion.

Application au jeu de billard ordinaire.

295*. Déterminer la route d'une bille revenant à sa position initiale après une double réflexion sur un billard circulaire.

296*. Trouver le lieu géométrique des projections du centre de l'ellipse sur toutes ses normales.

Trouver l'équation du lieu géométrique en coordonnées polaires, et la discuter sous cette forme.

297*. Etant donné le sommet, une tangente et le paramètre, déterminer la parabole.

Etant donné le sommet et deux tangentes, déterminer la parabole.

La question revenant à déterminer la direction de l'axe de la parabole, trouver l'équation qui doit déterminer cette direction.

298. Discuter et construise la courbe

$$y^2 - x^4 = 1.$$

299. Construire les traces d'un plan, connaissant un point de chaque trace et la distance d'un point donné de la ligne de terre à ce plan.

La solution de ce problème revient à mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée; mais ne peut-on pas se passer d'employer cette solution, qui sort des éléments exigés?

300. Le centre de gravité du contour d'un triangle.

Déterminer le centre de gravité du contour en fonction des côtés du triangle.

—

TRENTE-ET-UNIÈME EXAMEN.

—

501. Qu'entend-on par la règle de fausse position ? simple, double ?

Trouver un nombre tel que la moitié ajoutée à ses tiers donne pour somme 42.

Résoudre le problème par l'arithmétique et ensuite par l'algèbre.

502. Trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 20, et que la somme des produits de la première par 2 et de la seconde par 3 soit égale à 44.

503*. Comment peut-on s'assurer que trois points inaccessibles sont en ligne droite ?

Déterminer par le calcul trigonométrique la distance d'un point donné à un point inaccessible.

504*. Un triangle tournant autour de sa base, on propose de couper le triangle par une parallèle à la base de manière que le trapèze engendre un volume qui soit la moitié du volume engendré par le triangle total.

505. Déterminer le côté du pentagone régulier en fonction du rayon du cercle circonscrit.

Comment se coupent les diagonales d'un pentagone régulier ?

306. Etant donné l'équation

$$x^3-5x^2-ax+8=0,$$

Déterminer la constante a par la condition que cette équation ait deux racines égales, et résoudre l'équation.

307 *. Déterminer la surface d'une ellipse dont les foyers sont donnés et assujettie à être tangente à une droite donnée en un point donné.

Dans toute courbe du 2e degré douée d'un centre, le produit de la distance du centre à une tangente quelconque par une moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact est constant et égal au quart du rectangle des axes, ou, plus généralement, au quart de la surface de tout parallélogramme circonscrit à la courbe, et construit sur deux diamètres conjugués.

308*. Etant donné le sommet, le paramètre et un point, déterminer la parabole.

309. Mener un plan parallèle à un plan donné par ses traces, connaissant la distance de ces plans.

Après avoir résolu le problème dans le cas le plus général, on supposera le plan donné parallèle à la ligne de terre.

310. Qu'est-ce que le coin? Les conditions d'équilibre de cette machine.

Dans le cas d'un coin isocèle dont les côtés de la base sont de 2 et 3 décimètres et la longueur de 8, quel serait l'effet produit par une force de 100 kilogrammes?

Si, au lieu de supposer la force appliquée perpendiculairement à la tête du coin, on la supposait oblique et sous une inclinaison donnée a?

TRENTE-DEUXIÈME EXAMEN.

---

311. Qu'est-ce qu'un nombre complexe ?

Réduire $3^t\ 5^{pi}\ 7^{po}$ en fraction ordinaire, 1° de la toise, 2° du pied.

Convertir le nombre précédent en mètres.

312. Faire voir que l'unité monétaire nouvelle renferme les mesures de longueur et de poids.

Combien 25000 francs pèsent-ils de kilogrammes ; et, en supposant que la pièce de 5 francs ait 2,5 millimètres d'épaisseur, quelle longueur pourrait-on former avec ces 25000 francs en pièces de 5 francs placées les unes sur les autres ?

313. Combien faut-il de conditions pour déterminer un cercle de grandeur et de position ?

Décrire un cercle tangent à trois droites données.

Combien de solutions ?

314*. Déterminer le rayon d'un bassin circulaire inaccessible,

1° Le centre et un point de la circonférence étant indiqués ;

2° Le centre seul étant indiqué,

3° Aucun point n'étant indiqué.

315. Qu'est-ce qu'on entend par l'équation aux carrés des différences des racines?

Quelle est l'utilité de cette équation?

Dans quels cas peut-on se dispenser de la former?

316*. Toute équation peut-elle être considérée comme l'équation aux carrés des différences des racines d'une autre équation?

317 *. Trouver le lieu géométrique des points tels, que la somme des produits des carrés des distances de chacun d'eux aux sommets d'un triangle par le côté opposé soit constant et égal à un cube donné.

318. Discuter et construire la courbe

$$y^2+x^3=1.$$

Cette courbe a-t-elle un centre?

Déterminer les asymptotes et les tangentes parallèles à l'axe des abscisses, etc.

319. Etant donné une droite par ses projections, déterminer les projections d'une autre droite parallèle, connaissant un point de sa projection horizontale et la distance des deux parallèles.

320. Le centre de gravité d'un prisme, d'un cylindre, 1° du contour, 2° du volume.

—

TRENTE-TROISIÈME EXAMEN.

—

321. En quoi consiste la règle d'alliage?
Les problèmes qui s'y rapportent sont-ils toujours déterminés?
Payer 57 francs avec des pièces de 5 francs et de 2 francs.
Comment résoudrait-on ce problème par l'algèbre?

322. Qu'est-ce qu'on entend par la similitude de deux figures géométriques?
Dans quel rapport sont les contours, les surfaces, les volumes?
Trouver en lignes le rapport des surfaces de deux rectangles donnés.
Trouver en lignes le rapport des volumes de deux parallelipipèdes donnés.

323. La surface du tronc de cône droit.
Déterminer le rayon du cercle équivalent à la surface du cône droit, soit qu'on le réduise en secteur circulaire, soit qu'on le ramène à un triangle rectiligne.

324. Par un point donné de l'axe d'une parabole mener une normale à la courbe; déterminer la longueur de la normale comprise entre l'axe et la courbe.
Quelle doit être la position du point pour que la longueur de la normale soit égale à celle du paramètre?

325*. Etant donné l'axe, une tangente et un point, déterminer la parabole.

326. Discuter et construire la courbe

$$y^2+xy+x^2-4x=0.$$

Déterminer le centre, un système de diamètres conjugués, et en déduire les axes, etc.

327. Discuter et construire la courbe

$$y^4+x^3=1.$$

Résoudre l'équation d'abord par rapport à y, et discuter.

Résoudre ensuite l'équation par rapport à x, et discuter la courbe.

328. Etant donné la sécante d'un arc, trouver la tangente de la moitié de cet arc.

Expliquer la réalité des valeurs trouvées, par des considérations soit algébriques, soit géométriques.

329. Déterminer l'angle de deux plans qui se coupent sur la ligne de terre.

330. Etant donné deux couples dans des plans parallèles ou ou non parallèles, déterminer le couple résultant.

TRENTE-QUATRIÈME EXAMEN.

---

331. Qu'est-ce que l'arithmétique ?

En quoi l'algèbre diffère-t-elle de l'arithmétique ?

Comment représenter sous forme algébrique le nombre 4572 ?

Dans quel système ce nombre est-il représenté par les chiffres 16221 ?

332. Partager une ligne donnée en trois parties qui soient entre elles comme trois nombres donnés.

333. Démontrer qu'on peut toujours circonscrire une circonférence à un polygone régulier.

Connaissant le côté d'un polygone régulier et l'angle, déterminer les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

334. Etant donné deux circonférences concentriques, on peut toujours inscrire dans la grande circonférence un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la petite, et réciproquement circonscrire à la petite circonférence un polygone régulier dont les côtés ne touchent pas la grande.

Connaissant le rayon de la circonférence intérieure et l'épaisseur de la couronne, déterminer le maximum du côté du polygone régulier qu'on peut circonscrire à la petite circonférence sans toucher la grande.

335*. Déterminer le maximum et le minimum de l'angle des cordes supplémentaires de l'ellipse.

Démontrer que les angles maximum et minimum sont supplémentaires l'un de l'autre.

336*. Trouver le lieu géométrique des points d'où les deux tangentes menées à l'ellipse sont constamment perpendiculaires entre elles.

337*. Etant donné la directrice et deux points, déterminer la parabole.

Démontrer que les distances d'un point quelconque de la parabole à la directrice et au foyer sont égales.

338*. Etant donné le sommet, une tangente et un point de la parabole, déterminer la courbe.

Connaissant le sommet, la direction de l'axe et une tangente, déterminer la parabole;

Ou bien, connaissant le sommet, la direction de l'axe et un point, déterminer la parabole.

339. Déterminer les traces d'un plan, connaissant deux points par lesquels il doit passer et l'angle que ce plan fait avec un des plans de projection.

340. Q'est-ce que l'hélice cylindrique?

Par un point donné sur la courbe, mener une tangente à l'hélice.

—

TRENTE-CINQUIÈME EXAMEN.

—

341. Partager une longueur donnée en deux parties égales.

Par un point donné mener une droite qui divise en deux parties égales la distance de deux points inaccessibles.

342. Partager un triangle donné en deux parties équivalentes par une parallèle à la base.

Partager un triangle en deux parties équivalentes par une perpendiculaire à la base.

343. Trouver le côté du carré équivalent à un rectangle dont les côtés contigus sont de

$$3^t\ 5^{pi} \quad \text{et} \quad 2^t\ 4^{pi}\ 6^{po}.$$

344 *. Déterminer la relation qui doit exister entre les coefficients d'une équation du troisième degré pour que cette équation ait deux racines égales et de signe contraire, et déterminer ces racines.

345. Démontrer la formule de la tangente de la différence de deux arcs dont on connaît les tangentes.

346 *. Trouver le lieu géométrique des différentes positions qu'occupe le sommet d'un triangle donné dont les deux autres angles sont assujettis à rester constamment sur deux axes fixes rectangulaires.

347*. Qu'est-ce que la directrice dans les courbes du deuxième degré?

Déterminer la directrice de l'ellipse.

Démontrer que la directrice est la polaire du foyer,

Et que la droite qui joint un point quelconque de la directrice et le foyer est perpendiculaire à la corde de contact des deux tangentes qu'on peut mener par ce point à l'ellipse.

348 *. Etant donné un foyer, un point de la courbe et les longueurs des axes, déterminer l'ellipse.

349. Construire les traces d'un plan, connaissant deux points par lesquels il doit passer et la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné de la ligne de terre sur ce plan.

350. Qu'est-ce qu'une moufle?

Déterminer les conditions d'équilibre entre la puissance et la résistance, 1° dans le cas général où les poulies n'ont pas un même point fixe; 2° lorsque le système des poulies n'a qu'un seul et même point de suspension.

—

TRENTE-SIXIÈME EXAMEN.

—

351. Insérer cinq termes moyens par quotient entre 3 et 7.
Connaissant le nombre des termes d'une progression par quotient, le premier et le dernier, déterminer la somme de tous les termes.

352. Partager la circonférence en dix parties égales.
Partager le cercle en quatre parties équivalentes par trois droites parallèles.

353 *. Partager un tétraèdre donné en quatre parties équivalentes par des plans parallèles à la même face.

354 *. Résoudre l'équation

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0,$$

sachant que deux de ses racines sont égales et de signe contraire.
A quel signe peut-on reconnaître qu'une équation donnée du 4e degré a deux racines égales et de signe contraire ?

355. Trouver le lieu géométrique des sommets des hyperboles qui ont même asymptote et un foyer commun.
Trouver le lieu géométrique des foyers des hyperboles qui ont un même sommet et une asymptote commune.

356 *. Lorsqu'une suite de cercles touchent tous une courbe du deuxième degré en un même point donné, chacnn de ces cercles coupe de plus la courbe en deux points; la droite qui les joint a la même direction pour tous les cercles : déterminer la direction constante de ces cordes.

357 *. Etant donné un foyer, un sommet et une tangente, déterminer l'ellipse.

358. Discuter et construire la courbe

$$y=x^3-x.$$

Cette courbe a-t-elle un centre? A-t-elle des asymptotes, etc.?

Discuter et construire la courbe

$$\rho=\frac{2\sin^3\omega}{1-\sin^2\omega}.$$

359. Par deux points donnés par leurs projections mener un plan qui passe à égale distance de deux autres points donnés.

Le problème a évidemment deux solutions; déterminer l'angle des deux plans qui satisfont à l'énoncé.

360. Exposer la théorie générale de la composition des couples situés dans des plans quelconques.

Examiner le cas particulier de trois couples agissant dans des plans parallèles respectivement aux faces d'un parallélipipède rectangle, les bras de levier étant les mêmes et les forces représentées par les trois côtés contigus.

—

TRENTE-SEPTIÈME EXAMEN.

361. Qu'est-ce qu'une progression par différence?

Démontrer que, si l'on insère un même nombre de termes moyens entre les termes consécutifs d'une progression, tous les termes forment une progression.

Etant donné le premier terme, le second et la somme de tous les termes, déterminer le dernier terme de la progression par différence.

362. Déterminer deux nombres, connaissant leur somme a et la somme b de leurs quatrièmes puissances.

Ne peut-on pas résoudre le problème à l'aide d'équations bi-carrées, en faisant un choix convenable de l'inconnue?

363. Démontrer que la somme des côtés d'un parallélogramme quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales.

Dans un quadrilatère quelconque ces deux sommes sont-elles égales?

Quelle est la différence?

364*. Etant donné un triangle rectangle ABC, du sommet A de l'angle droit on abaisse une perpendiculaire AD sur l'hypoténuse; on fait de même dans les triangles ADB, DEB, EFB, etc.: calculer la somme des triangles CAD, DAE, DEF, etc.

Déduire de cette solution la démonstration géométrique de la limite de la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante.

365 *. Le lieu géométrique des sommets des parallélogrammes construits sur tous les diamètres conjugués de l'ellipse.

Démontrer que deux ellipses sont semblables lorsque leurs axes sont dans le même rapport.

366 *. Déterminer la parabole assujettie à être tangente à deux droites données en des points donnés.

Etant donné la direction de l'axe, le paramètre, une tangente et son point de contact, déterminer la parabole.

367 *. Etant donné une asymptote, une directrice, une tangente, déterminer l'hyperbole.

368. Discuter et contruire la courbe

$$y = x^2 - x^4.$$

Former l'équation générale de la tangente et déterminer les points où elle est parallèle à l'axe des abscisses.

369. Trouver l'angle de deux droites qui se coupent en un point de la ligne de terre.

370. Le centre de gravité du secteur sphérique.

Calculer le moment d'un secteur sphérique par rapport à un plan passant par le centre de la sphère et parallèle au plan tangent au sommet du secteur, connaissant le rayon de la sphère et la flèche du segment.

TRENTE-HUITIÈME EXAMEN.

—

371. Quelle différence y a-t-il entre l'intérêt simple et l'intérêt composé?

Qu'entend-on par annuités?

Quelle est la somme qui, placée à intérêts composés pendant n années, est devenue b après ce temps.

372*. Construire un triangle égal à un triangle donné et dont les côtés soient assujettis à passer chacun par un point donné.

Ce problème se ramène au suivant:

Par un des points d'intersection de deux circonférences données mener une sécante telle, que la différence des cordes interceptées soit égale à une longueur donnée.

373*. Inscrire dans une sphère donnée un cylindre d'un volume donné.

Quel est le volume maximum du cylindre inscrit dans la sphère?

Cette valeur maximum peut s'obtenir de deux manières : 1° soit par des considérations algébriques tirées de la résolution d'une équation du 3e degré; 2° soit par des considérations géométriques tirées du contact de deux courbes.

374. Résoudre l'équation

$$x^4 + px = q,$$

le rapport de eux racines étant égal à 3.

375 *. Etant donné l'angle des asymptoles et la somme ou la différence des carrés des axes, déterminer l'hyperbole.

Démontrer que l'axe transverse de l'hyperbole partage en deux parties égales l'angle des asymptotes.

376 *. Déterminer graphiquement les points d'intersection de deux courbes concentriqnes du deuxième degré, sans avoir besoin de construire ces courbes.

377 *. Etant donné un foyer, un sommet et un point, déterminer l'ellipse.

378. Discuter et construire la courbe

$$y^2 = x^2 - x^4.$$

Après avoir discuté la courbe en coordonnées rectilignes, passer aux coordonnées polaires et recommencer la discussion et la construction.

379. Déterminer les inclinaisons des faces d'un angle trièdre dont les angles plans sont donnés.

380*. Trouver 1° les conditions d'équilibre d'un poids suspendu par un nœud coulant ou par un anneau à un cordon fixé par ses deux bouts; 2° si l'on suppose que le cordon, fixé par une seule des extrémités, soit enroulé autour d'une poulie et tiré de manière à faire remonter le poids le long de ce cordon, quelle courbe décrira l'anneau ou le nœud coulant?

TRENTE-NEUVIÈME EXAMEN.

—

381. Extraire la racine cubique du nombre 7563298.

N'est-il pas possible de dire *à priori* si ce nombre est un cube parfait ou non ?

Combien faut-il avoir trouvé de chiffres à la racine, par rapport au nombre des chiffres qui restent à trouver, pour pouvoir achever l'opération par une simple division ?

382. Déterminer le côté du cube équivalent à un parallélipipède dont les dimensions sont a, b, c,

1° Par le calcul, 2° par une construction géométrique.

La solution géométrique peut-elle être obtenue au moyen de la règle et du compas ?

383. Déterminer la surface engendrée par un demi-décagone régulier tournant autour d'un axe en fonction de son côté.

384. Etant donné deux équations

$$x^2+px+q=0,$$
$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

former une troisième équation dont les racines soient les sommes deux à deux des racines de ces équations.

Peut-on déterminer avant tout calcul le degré de l'équation cherchée ?

385 *. Inscrire dans un losange donné une ellipse dont le rapport des axes soit égal au rapport des diagonales.

386 *. Etant donné un foyer, la longueur des axes et une tangente, déterminer l'ellipse.

387 *. Déterminer le lieu géométrique du foyer des courbes du 2e degré qui ont même centre et deux tangentes communes.

Etant donné le centre et trois tangentes d'une courbe du 2e degré, ellipse ou hyperbole, déterminer directement les foyers.

388*. Etant donné un asymptote, un sommet et une tangente, déterminer l'hyperbole.

Déterminer les perpendiculaires abaissées du sommet 1° sur l'asymptote, 2° sur la tangente en un point donné de la courbe; une d'elles est une fonction constante des axes.

389. Déterminer le centre de la sphère inscrite dans un tétraèdre donné (géométrie descriptive).

Etant donné l'angle rectiligne d'une face et les inclinaisons des deux autres faces sur elle, déterminer l'angle trièdre.

Construction géométrique indépendante de la considération de l'angle trièdre supplémentaire.

390. Les conditions d'équilibre d'un corps pesant reposant par plusieurs points sur un plan horizontal.

Examiner le cas particulier de trois points d'appui, et déterminer la pression en chaque point.

QUARANTIÈME EXAMEN.

—

391. Trouver un nombre qui soit à la fois cube et carré.
Le problème est-il déterminé ?
Déterminer un nombre carré qui soit la somme de deux nombres carrés.

392*. Décrire un cercle qui passe par deux points donnés et coupe une droite donnée sous une corde d'une longueur donnée.
Appliquer le calcul analytique au même problème en faisant choix des coordonnées polaires.
Quelle est en coordonnées polaires l'équation la plus générale du cercle.

393*. Trouver le maximum du volume d'un cylindre dont on connaît la surface totale.
Déterminer la relation de maximum par la considération du contact de deux courbes.

394*. Circonscrire à une ellipse donnée un rectangle d'une surface donnée, et déterminer la surface du plus grand et du plus petit rectangle circonscrit à l'ellipse.
Construire dans une ellipse donnée un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.

395*. Etant donné deux courbes à centre du 2e degré, de tous les points de l'une on mène à cette courbe des tangentes qui coupent l'autre en deux points, par lesquels on mène des tangentes à cette seconde courbe : déterminer le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes.

Etant donné deux courbes à centre du 2e degré, construire une troisième courbe concentrique à la première et égale ou semblable à la seconde et semblablement située.

396 *. Déterminer le lieu géométrique des foyers des paraboles qui ont même sommet et un point commun.

On commencera par déterminer l'équation la plus générale de la parabole rapportée à son sommet et à des axes rectangulaires. Quelle est la forme de cette équation ?

397 *. Construire une ellipse connaissant les foyers et une tangente.

398. Discuter et construire la courbe

$$y^2 = x^3 - x^4.$$

399. Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par quatre points donnés par leurs projections.

400. Les roues dentées.

Deux roues communiquent entre elles par un certain nombre de roues ; tout ce qu'on sait c'est que l'une a m dents et l'autre m' : si la première fait n tours, combien la seconde en fera-t-elle dans le même temps ?

—

QUARANTE-ET-UNIÈME EXAMEN.

—

401. Démontrer qu'un produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs ; étendre le théorème à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

402. Démontrer que la racine d'une puissance imparfaite ne peut être exprimée ni en nombre entier ni en nombre fractionnaire.

403. Exposer les règles du calcul des radicaux.

Qu'entend-on par les déterminations diverses d'un même radical ?

Résoudre l'équation

$$x^5 - 1 = 0.$$

404 *. Une corde de longueur constante se meut dans un cercle ; trouver le lieu géométrique que décrit un point marqué à volonté sur cette droite.

405 *. Dans toute parabole, si l'on mène une corde quelconque perpendiculaire à l'axe, la somme ou la différence des distances de chaque point de la courbe à la corde et au foyer est constante : déterminer la constante.

Déterminer le lieu géométrique des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun d'eux à un point et à une droite donnés soit égale à une longueur donnée.

406 *. Trouver le lieu géométrique des projections du centre de l'ellipse sur toutes ses tangentes.

Trouver l'équation du lieu géométrique en coordonnées polaires.

407. Démontrer que les côtés du décagone, du pentagone et de l'hexagone réguliers forment un triangle rectangle, en calculant la valeur de ces côtés en fonction du rayon du cercle circonscrit.

La même propriété peut être démontrée géométriquement.

408. Discuter et construire la courbe

$$x^3 - xy^2 = 1.$$

409. Etant donnés deux angles plans et l'inclinaison de leurs faces, construire l'angle trièdre.

410. Qu'est-ce que la pesanteur ?

Quelle différence y a-t-il entre la pesanteur et le poids ?

Comment se mesure le poids d'un corps ?

Démontrer la formule

$$P = yDg,$$

dans laquelle P représente le poids du corps, y le volume, D la densité, g la force de pesanteur.

Comment pourrait-on déterminer g à l'aide du plan incliné ?

—

QUARANTE-DEUXIÈME EXAMEN.

—

411. Comment se fait la soustraction de deux nombres, dont l'un est fractionnaire et l'autre une fraction décimale?

Est-il préférable de réduire les deux nombres à la forme de fractions décimales?

Qu'est-ce qu'une fraction décimale périodique?

Comment peut-on retrouver la fraction ordinaire qui a produit la fraction décimale périodique?

412. Inscrire dans un triangle un rectangle d'espèce donnée.

Examiner le cas particulier où le rectangle à inscrire se change en carré.

413. Quel est le nombre des permutations de m éléments dont n égaux à a, n' à b, n'' à c, $n+n'+n''=m$?

Développer la puissance m d'un polynome quelconque.

414*. Inscrire un carré dans une ellipse donnée.

Déterminer le côté du carré inscrit en fonction des axes de l'ellipse.

415*. Circonscrire un carré à une ellipse donnée.

Déterminer le côte du carré circonscrit en fonction des axes de l'ellipse.

Quel est le rapport des côtés des carrés inscrit et circonscrit à l'ellipse?

Quelle est l'aire du rectangle construit sur les côtés des carrés inscrit et circonscrit?

416 * Etant donné le centre d'une hyperbole, la longueur du diamètre transverse, la direction de son conjugué et un point de la courbe, décrire l'hyperbole.

Déterminer, par une construction géométrique, les asymptotes de l'hyperbole.

417 *. D'un point quelconque d'une parabole on mène une tangente, qui rencontre, chacun en un point, l'axe de la courbe et la perpendiculaire menée à l'axe par le sommet : démontrer que le rectangle des segments de la tangente compris entre le point de contact et les points d'intersection est égal au produit de la sous-tangente par la distance du foyer au point de contact.

418. Discuter et construire la courbe

$$xy^2 - yx^2 = 1.$$

419. Etant données deux droites par leurs projections, déterminer les projections de la droite qui partage leur angle en deux parties égales.

420. A quoi servent les cordes comme machines?

Trouver les conditions d'équilibre du polygone funiculaire.

Trouver les conditions d'équilibre d'une corde suspendue par ses extrémités. Equation de la chaînette.

QUARANTE-TROISIEME EXAMEN.

421. Exprimer en mètres carrés la surface d'un rectangle dont les côtés contigus ont 15ᵗ 2ᵖⁱ et 12ᵗ 5ᵖⁱ.

422. Combien faut-il de conditions pour déterminer la similitude de deux tétraèdres.

Démontrer que deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont angle dièdre égal formé par deux faces semblables et semblablement situées.

423. Résoudre l'équation

$$x^5+px+q=0,$$

sachant que les racines sont en progression géométrique.

424*. Couper un tronc de cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle aux deux bases.

Déterminer le rayon de la section circulaire et la hauteur du plan sécant au dessus de la grande base.

425*. Dans quels cas peut-on déterminer les points d'intersection de deux courbes du 2ᵉ degré données de grandeur et de position, sans avoir besoin de construire ces courbes?

Examiner les cas particuliers où les courbes ont un même foyer, une même directrice.

426*. Déterminer le rectangle des parties de la tangente à l'ellipse comprises entre le point de contact et les points où cette tangente rencontre les axes.

Déterminer la longueur et la position du demi-diamètre dont le carré est équivalent à ce rectangle.

427*. Si par le centre O d'une ellipse quelconque on mène deux demi-diamètres perpendiculaires, tels que OD et OE, la somme

$$\frac{1}{\overline{OD}^2}+\frac{1}{\overline{OE}^2}$$

est constante et égale à la somme des carrés inverses des demi-axes, c'est-à-dire

$$\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}.$$

428. Discuter et construire la courbe

$$x^2y^3+xy^2=1.$$

429. Etant donné deux plans par leurs traces, mener un plan qui divise en deux parties égales l'angle de deux plans donnés.

On pourra supposer ensuite que l'un des plans donnés se confond avec un des plans de projection.

430. Comment peut-on exprimer la pression dans la théorie du plan incliné.

Connaissant la pression qu'une sphère de rayon r et de densité d exerce sur un plan incliné de α sur l'horizon, déterminer la force parallèle au plan, qui la retient en équilibre.

—

QUARANTE-QUATRIÈME EXAMEN.

—

431. Prendre les $\frac{5}{9}$ de $\frac{11}{20}$.

Est-il besoin de réduire les fractions au même dénominateur ?

Le résultat serait-il différent si l'on faisait la réduction ?

432. Mesurer l'angle de deux droites.

L'angle de deux plans.

Au lieu de l'angle formé par les perpendiculaires élevées dans chaque plan par un des points de leur commune intersection, n'aurait-on pas pu prendre l'angle formé par deux obliques ?

433*. Partager un tétraèdre en trois parties équivalentes par trois plans passant par les arêtes qui concourent au même sommet.

434*. Etant donné une ellipse O et un point P sur le grand axe, par le centre on mène des diamètres tels que DOD′, et par le point P des sécantes PMQ, qui rencontrent le diamètre en M et la courbe en Q, de telle sorte que l'on ait $PM = MQ$: quel est le lieu géométrique des points M ?

Au lieu de la relation $PM = MQ$, si l'on donnait la relation constante $MP = PQ$, quel serait le lieu géométrique des points M ?

435*. Etant donné la directrice, le paramètre et un point de la courbe, déterminer la parabole.

Trouver le lieu géométrique de tous les points également distants d'un point donné et d'une droite donnée.

436*. Deux paraboles égales construites sur un même axe et dirigées dans le même sens sont asymptotes l'une de l'autre.

Etant donné deux paraboles égales dirigées suivant le même axe et dans le même sens, si de tous les points de la parabole extérieure on mène à la parabole intérieure des sécantes perpendiculaires à l'axe, le produit de la sécante entière par la partie extérieure est constant; déterminer ce produit.

437*. Etant donné trois points d'une parabole et la direction de l'axe, déterminer la courbe.

438. Discuter et construire la courbe

$$y=\frac{x}{1-x^2}.$$

439. Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés par leurs traces.

440. De la charge du point d'appui dans le levier.

Un levier d'une longueur l et appuyé par ses deux extrémités porte un poids p à une distance d d'une de ses extrémités : quelles sont les pressions que supportent les appuis ?

QUARANTE-CINQUIÈME EXAMEN.

---

441. Extraire la racine carrée de 134,256 à 0,01 près.
Etant donné le nombre 534,26 dans le système septénaire, extraire la racine carrée de ce nombre à une unité près du 3e ordre sous-unitaire.

442. Extraction de la racine carrée des polynomes algébriques.

443. La surface de la zone sphérique à une ou deux bases.
Déterminer la surface de la zone à une base, connaissant le rayon de la sphère et l'arc générateur.

444. Le volume du segment sphérique à une ou deux bases.
A quel endroit de l'axe de la sphère faut-il placer la hauteur pour que le volume du segment sphérique à deux bases soit le plus grand possible?

445*. Etant donné une hyperbole, à laquelle on méne une tangente quelconque, puis, du centre, une perpendiculaire à la tangente, on demande le lieu géométrique des points d'intersection de cette perpendiculaire avec l'ordonnée du point de contact.

446*. Etant donné une asymptote et trois points de l'hyperbole, déterminer la courbe.

Démontrer que les parties de toute sécante comprise entre les asymptotes et la courbe sont égales.

Etant donné les asymptotes et un point de la courbe, déterminer les axes de grandeur et de direction.

447*. Déterminer le lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles qui ont même foyer et un point commun.

448. Discuter et construire la courbe

$$y^2 = \frac{2x - x^2}{x^2 - 1}.$$

449. Construire la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.

Démontrer d'abord que la plus courte distance entre les deux droites est la perpendiculaire commune aux deux droites, et qu'il n'existe qu'une seule perpendiculaire commune.

450. Une échelle de 10 mètres de longueur et du poids de 50 kilogrammes est appuyée obliquement contre un mur vertical; la distance du pied de l'échelle au mur est de 4 mètres, un homme du poids de 65 kilogrammes se place snr l'échelle à une longueur de 6 mètres à partir de sa base: quelle est la pression de l'échelle sur le mur vertical?

—

QUARANTE-SIXIÈME EXAMEN.

---

451. Déterminer le plus petit multiple des trois nombres

126, 240, 512.

Si l'on avait trouvé le plus grand commun diviseur de ces trois nombres, que faudrait-il faire pour avoir le plus petit multiple ?

452. Théorie du plus grand commun diviseur de deux polynomes algébriques.

453. Théorie de l'élimination entre deux équations à deux inconnues d'un degré quelconque.

Comment peut-on s'assurer que l'équation finale ne renferme pas des valeurs étrangères?

A quoi répond, en géométrie, l'élimination entre deux équations à deux inconnues ?

454. Déterminer les intersections d'une parabole et d'une circonférence ayant son centre au foyer de la parabole et pour rayon le paramètre.

455*. Si d'un point quelconque, intérieur ou extérieur, on mène à une parabole une sécante et un diamètre, le rectangle des deux parties de la sécante comprises entre

le point et la courbe est égal à la distance du point à la courbe comptée sur le diamètre multiplié par le paramètre du diamètre conjugué à la sécante.

456*. Etant donné deux points d'une parabole, une tangente et la direction de l'axe, déterminer la courbe.

457*. Etant donné une tangente et son point de contact, la longueur de la normale en ce point, et le paramètre, déterminer la parabole.

Démontrer que la sous-normale de la parabole est égale au demi-paramètre.

La sous-normale est-elle encore égale au demi-paramètre, lorsque la courbe est rapportée à un système d'axes conjugués obliques?

458. Discuter et construire la courbe

$$y^2=\frac{x}{1+x}.$$

459. Réduire à l'horizon l'angle de deux droites connaissant l'angle de ces droites et les angles qu'elles font avec la verticale.

Résoudre le même problème à l'aide de la théorie des angles trièdres.

460. Démontrer que tout plan passant par le milieu de la hauteur de la zône partage cette surface en deux parties équivalentes.

—

QUARANTE-SEPTIÈME EXAMEN.

461. Etant donné le premier terme, le nombre et la somme des termes d'une progression par quotient, déterminer la raison et par conséquent la progression.

462. Démontrer que, si l'on insère entre les termes consécutifs d'une progression par quotient un même nombre de termes moyens, la suite de tous les termes forme encore une progression.

463. Etant donné une équation d'un degré quelconque, former une seconde équation dont les racines soient les rapports par quotient des racines deux à deux de la proposée.

464. Le volume de la pyramide triangulaire.

Etant donné une pyramide triangulaire régulière dont le côté du triangle de base est de 20^m et l'arête latérale de 50^m, déterminer le volume de la pyramide.

465. Le volume du secteur sphérique.

466. Etant donné l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, trouver l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes.

Démontrer la propriété des sécantes entre les asymptotes.

Etant donné les asymptotes et la puissance de l'hyperbole, déterminer la courbe.

467*. Etant donné la direction de l'axe, une tangente et son point de contact, et la longueur de la normale en ce point, déterminer la parabole.

468. Discuter et construire la courbe

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}.$$

Par le point $x=-2$ $y=3$ mener une tangente à la courbe.

469. Construire l'angle d'une droite donnée par ses projections et d'un plan donné par ses traces.

On sait que ce problème peut se résoudre de deux manières, soit en cherchant directement l'angle de la droite donnée avec sa projection sur le plan donné, soit en déterminant l'angle que la droite donnée fait avec la perpendiculaire menée au plan donné par un point de sa direction; réunir les deux solutions dans une seule et même construction.

470. Qu'est-ce que la romaine? Comment avec un poids donné et un bras de levier connu pourrait-on graduer la romaine?

Examiner le cas particulier où le centre de suppression de la romaine ne serait pas situé au centre de gravité de la balance.

QUARANTE-HUITIÈME EXAMEN.

---

471. Calculer la somme des 10 premiers termes de la progression

$$\div\!\!\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : \text{etc...}$$

Calculer leur produit.

Exprimer généralement la formule du produit de tous les termes d'une progression par quotient dont on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes.

472. Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur un plan.

Etant donné un plan P et une droite AB située dans ce plan, d'un point quelconque O de l'espace on mène une perpendiculaire OH à la droite AB, et, par le point H, une nouvelle perpendiculaire à AB, laquelle perpendiculaire HC est située dans le plan P: démontrer que la perpendiculaire OC abaissée du point O sur la droite HC est perpendiculaire au plan P.

473. Par un point donné sur la surface de la sphère faire passer un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle, sur un arc de petit cercle donné.

Déterminer les deux pôles d'un petit cercle donné sur la sphère.

474. Déterminer par une construction graphique le rayon d'une sphère sans autre instrument que la règle et le compas.

475*. Partager un tétraèdre donné en quatre parties équivalentes par des plans passant par le même sommet.

476*. Par le centre O d'une courbe du 2ᵉ degré, ellipse ou hyperbole, on mène des rayons vecteurs OM à tous les points de la courbe, et des perpendiculaires OP à chacun de ces rayons vecteurs telles que l'on ait

$$\frac{1}{\overline{OM}^2}+\frac{1}{\overline{OP}^2}=\frac{1}{K^2},$$

K étant une quantité constante : quel est le lieu géométrique des points P?

477*. Etant donné le foyer, une tangente et son point de contact, déterminer la parabole.

478. Discuter et construire la courbe

$$y=2x\pm\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{4x-x^2}}.$$

479. Par un point donné mener une droite qui s'appuie sur deux droites données par leurs projections.

Etant donné trois droites par leurs projections, déterminer les projections d'une droite qui s'appuie sur chacune d'elles par un de ces points.

Le pro blème est-il déterminé ?

480 . Quelle est la charge des points d'appui des tourillons dans l'équilibre du treuil.

QUARANTE-NEUVIÈME EXAMEN.

—

481. Extraction de la racine cubique des nombres entiers, fractionnaires, décimaux.

482. Extraction de la racine cubique des polynomes algébriques.

483. Déterminer le rectangle, connaissant sa surface et la différence de deux côtés contigus.

La solution donnée par le calcul algébrique s'accorde-t-elle avec la solution géométrique connue?

484. Le volume du tronc de pyramide, quel que soit le nombre de côtés de la base.

Le volume du tronc de pyramide triangulaire, le plan sécant n'étant pas parallèle à la base.

Quelles conditions faut-il ajouter pour que le problème soit entièrement déterminé?

485. Etant donné la surface et le volume d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères, déterminer ses dimensions.

Le rapport des surfaces et des volumes de la sphère et du cylindre circonscrit.

486. Démontrer que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante dans une ellipse quelconque.

La somme des carrés des diagonales des parallélogrammes circonscrits à l'ellipse et construits sur deux diamètres conjugués est-elle constante? Quelle est sa valeur?

487*. Connaissant le paramètre d'une parabole, la direction de l'axe, une tangente et son point de contact, déterminer la courbe.

On commence par déterminer directement la position de l'axe et ensuite le sommet de la parabole. Au lieu du sommet, si l'on voulait déterminer le foyer?

488. Discuter et construire la courbe

$$y = \pm \frac{x^2-1}{x^2+1}\sqrt{x^2+3}.$$

Déterminer les asymptotes de la courbe.

489. Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données par leurs projections.

Pour plus de simplicité, on placera les deux droites chacune sur un des plans de projection.

490. Le centre de gravité d'un tronc de cône droit dont on connaît les rayons des bases et la hauteur.

—

CINQUANTIÈME EXAMEN.

—

491. Partager un nombre donné *a* en deux parties dont le produit soit égal à *b*.

Quel est le plus grand produit que l'on peut former avec deux parties d'un nombre quelconque ?

492. Trouver la valeur de x qui rend *maximum* ou *minimum* la fonction

$$\frac{3x^3}{1-x^2}.$$

493. Déterminer deux nombres connaissant leur produit et la somme de leurs carrés.

L'élimination directe conduit à une équation bi-carrée. La valeur qu'on tire de cette équation s'accorde avec celle qu'on obtient par une élimination particulière.

494. Etant donné deux droites qu'on ne peut prolonger, mener une droite qui partage leur angle en deux parties égales.

Par un point donné mener une droite qui concoure au même point que deux autres droites qu'on ne peut prolonger.

495 *. Déterminer le cône droit du moindre volume circonscrit à une sphère donnée.

496. Former une équation dont les racines soient les sommes deux à deux des carrés des racines d'une équation proposée.

Appliquer la théorie à l'équation du 2e degré

$$x^2+px+q=0.$$

497*. Etant donné une asymptote, une directrice et la distance du centre au foyer, déterminer l'hyperbole.

498*. Etant donné deux paraboles égales, construites sur le même axe et dirigées dans le même sens, on mène des droites tangentes à l'une des paraboles et qui coupent la seconde en deux points, par lesquels on mène des tangentes à cette seconde courbe : quel est le lieu géométrique des points d'intersection de ces tangentes?

499. Etant donné quatre points par leurs projections, comment peut-on reconnaître que ces quatre points sont situés dans un même plan?

En supposant qu'ils soient situés dans un même plan, comment s'assurer qu'ils sont situés sur une même circonférence?

500. Déterminer 1° la surface, 2° le volume, d'un corps de révolution, connaissant 1° la longueur de la ligne génératrice et la distance de son centre de gravité à l'axe de révolution; 2° la surface génératrice et la distance de son centre de gravité à l'axe de révolution.

Application du théorème à la surface et au volume du corps produit par la révolution d'un cercle autour d'un axe situé d'une manière quelconque dans son plan.

EXAMEN SUR LES CONNAISSANCES SUPPLÉMENTAIRES.

Après avoir répondu sur les matières exigées, les candidats peuvent demander à être interrogés de nouveau sur les connaissances en dehors du programme, telles que la physique, la chimie, la géométrie à trois dimensions et l'analyse supérieure et infinitésimale.

Ce que nous avons dit précédemment au sujet de l'examen oral nous dispense de revenir à de nouveaux conseils sur la manière de subir cette seconde épreuve orale. Mais nous croyons nécessaire de rappeler aux candidats qu'ils ne doivent s'exposer aux chances d'un nouvel examen que dans le cas où l'examen sur les matières exigées aura été très satisfaisant. Ils ne s'y exposeront surtout qu'avec la conviction profonde et consciencieuse qu'ils sont parfaitement en état de répondre à toutes les questions qui se rapportent aux connaissances indiquées par eux-mêmes à l'examinateur. On doit croire qu'un examen faible sur ces matières ne détruirait pas en entier l'effet d'un premier examen satisfaisant; mais il pourrait laisser dans l'esprit de l'examinateur une opinion défavorable de la rectitude de jugement et de la modestie du candidat; et l'on doit sentir combien il importe de ne pas perdre par sa faute aucun des avantages qu'on a eu le bonheur d'obtenir par une première épreuve.

Toutefois, il n'entre nullement dans notre pensée de chercher à effrayer les candidats au point de les faire reculer devant une nouvelle épreuve, qui pourrait ajouter de nouveaux avantages aux avantages déjà obtenus. Chacun comprend aisément combien il importe de mériter un rang distingué dans l'opinion et sur la liste de l'examinateur. Si le

concours a ses dangers, il offre aussi d'immenses avantages à celui qui a su se préparer, et c'est bien le moins que le travail consciencieux et le vrai savoir reçoivent leur juste récompense. Nous engageons donc les candidats à ne pas manquer de faire valoir toutes leurs connaissances : car une bonne note de plus confirme un premier jugement favorable sur les épreuves antérieures et sert de garantie en cas d'échec dans les épreuves qui doivent suivre.

Nous ne pourrions, sans sortir des bornes que nous avons dû nous prescrire, offrir aux candidats une série de questions d'examen sur les connaissances supplémentaires. Nous pensons qu'il suffira de leur indiquer les grandes questions théoriques qui peuvent faire apprécier sur-le-champ leur degré d'instruction en chaque matière spéciale.

En physique : Les poids spécifiques des solides, des liquides et des gaz ; les chaleurs spécifiques des corps sous leurs trois formes ; les lois de dilatation et les expériences au moyen desquelles on peut les constater ; les phénomènes électro-magnétiques ; les principales applications de l'acoustique ; enfin les théories importantes de l'optique, telles que la réflexion, la réfraction et la polarisation.

En chimie : La nomenclature et le système atomique ; l'extraction et la préparation des corps simples et des agents chimiques les plus importants : l'oxygène, l'hydrogène, le chlore, les acides nitrique et sulfurique ; la théorie de l'analyse chimique ; etc.

En trigonométrie à trois dimensions : La ligne droite et le plan dans l'espace, les principales propriétés des surfaces du 2e degré.

En calcul différentiel et intégral : Les théorèmes de Taylor et de Maclaurin ; la théorie des maxima et des minima, la méthode générale des tangentes, la théorie des développées et des rayons de courbure ; l'intégration des fractions rationnelles ; les quadratures et les cubatures ; l'intégration des équations différentielles, etc.

EXAMEN ÉCRIT.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Avant le dernier règlement de 1837 sur les examens d'admission à l'Ecole polytechnique, les épreuves du concours se bornaient, à proprement parler, à l'examen oral de mathématiques. La plupart des candidats qui se présentaient aux examens avaient terminé toutes les études classiques; les épreuves écrites de littérature française et latine n'étaient par conséquent qu'une simple formalité, propre à constater l'instruction acquise dans les classes. Nous avons expliqué précédemment les raisons qui ont fait attacher une plus grande importance à ces épreuves et qui en ont fait une des conditions indispensables du concours.

Mais il y avait encore à réparer une omission dans l'ancien règlement du concours, et c'est ce qu'a fait le nouveau règlement avec autant de sagesse que de prévoyance. On a compris que la seule épreuve de l'examen oral ne pouvait suffire pour décider du mérite relatif des candidats. Tel élève capable de répondre avec assurance, et avec une précision suffisante pour l'improvisation, pourrait n'être pas en état de développer, avec tous les détails nécessaires, une question écrite; tel autre, au contraire, timide et embarrassé dans un examen oral, pourrait reprendre tous ses avantages par la méditation, et donner dans une composition écrite la véritable mesure de son instruction, de son aptitude et de sa capacité. L'épreuve orale et l'épreuve écrite ne sauraient donc être séparées.

L'épreuve de la composition de mathématiques est une

des plus importantes de l'examen ; et si l'épreuve orale est sans contredit la plus importante, c'est que la publicité sert ici de sanction au jugement de l'examinateur.

Les candidats ne sauraient donc apporter trop d'attention à cette partie de l'examen, à la composition de mathématiques.

Le sujet de composition écrite renferme deux, ou plus généralement trois questions : 1° une question de théorie ; 2° un problème à résoudre ; 3° une équation de courbe à discuter et construire.

Les questions de théorie ne sont autre chose que la démonstration des points les plus importants de l'algèbre ou de la géométrie. C'est plutôt affaire de mémoire que d'intelligence. Les candidats exposeront les théorèmes avec ordre et exactitude, et s'attacheront à rédiger les démonstrations avec toute la clarté et la précision désirables. Cette partie de la composition écrite devant servir à constater l'instruction mathématique du candidat, il est de toute importance que les principes invoqués dans les démonstrations soient placés, chacun à son rang, dans l'ordre de l'enseignement. Ainsi pour la démonstration d'un théorème qui se rapporterait à une proposition du IIIe livre de la géométrie de Legendre, par exemple, il ne se servira pas d'un théorème démontré dans les livres suivants. En général cette question de théorie ne peut offrir de difficulté aux candidats déjà préparés par le travail de rédaction.

Le problème à résoudre offre un peu plus de difficulté, comme toute question de ce genre. Toutefois les exercices nombreux qu'ils n'auront pas manqué de faire dans le cours des études de 2e année de mathématiques donneront aux candidats les moyens de sortir avec avantage de cette épreuve difficile. Nous n'avons pas besoin de leur recommander de nouveau d'exposer avec tous les développements nécessaires les calculs qui peuvent se présenter dans la solution du problème, d'effectuer les constructions avec

soin, de discuter et de construire les courbes auxquelles la solution peut donner lieu. Cette partie de la composition écrite est, à notre avis, la plus difficile; mais nous devons prévenir les candidats contre les dangers du découragement. Lors même qu'ils n'auraient pu parvenir à trouver la solution du problème, ils se garderont bien de renoncer à la composition : car la nullité, dans une épreuve quelconque, est nne cause immédiate de rejet. Ils n'oublieront pas que le problème n'est pas à lui seul toute la composition écrite, et que la manière satisfaisante dont ils auront traité les deux autres questions peut racheter jusqu'à un certain point la faiblesse de cette partie de l'épreuve écrite. Du reste, il est presque impossible que le candidat ne fasse pas quelques tentatives pour résoudre le problème proposé; et il peut, par ces efforts même, donner une preuve suffisante d'intelligence et de capacité.

La troisième question, l'équation de courbe à discuter et à construire ne saurait embarrasser les candidats. Ils ont été exercés, sans aucun doute, à ce genre de discussion; ils connaissent la méthode générale; il ne leur reste qu'à appliquer la théorie à un exemple particulier (1).

Quant à l'ordre qu'ils doivent suivre dans la discussion du lieu géométrique, il nous semble qu'ils doivent s'attacher d'abord à reconnaître, d'une manière approchée, la forme et l'étendue de la courbe, en se servant des diamètres, des points d'intersection avec les axes, et des valeurs de l'ordonnée correspondantes aux valeurs de l'abscisse entre $x=-\infty$, jusqu'à et $x=+\infty$.

La recherche de la tangente, des asymptotes, et enfin

(1) Les candidats consulteront avec fruit l'ouvrage de M. Blanchet, intitulé : *Compléments de mathématiques spéciales, Méthode pour la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs données par des équations résolues, etc.*

des points singuliers de la courbe, en fera reconnaître plus particulièrement la forme et les propriétés.

Nous ne saurions mettre les candidats trop en garde contre les fautes de calcul dans la discussion des équations des lieux géométriques. Si la discussion donne lieu à la résolution d'équations, ils auront soin de déterminer les inconnues avec une approximation suffisante, à 0,01 près par exemple. Les développements des puissances fractionnaires seront donnés, soit par le binôme de Newton, soit, et nous croyons ce moyen préférable dans le cas présent, par l'extraction directe de la racine indiquée, les candidats ne devant faire usage des connaissances en dehors du programme qu'après avoir épuisé toutes les ressources de l'enseignement prescrit dans les classes de mathématiques de 1re et de 2e année.

Le travail préparatoire de la composition écrite nécessite quelques précautions que nous recommandons aux candidats. Quel que soit l'ordre dans lequel les questions sont présentées par l'examinateur, ils feront bien de commencer par la question la plus facile à traiter. De cette manière il leur restera assez de temps pour le problème, qui pourrait bien dans certaines circonstances exiger tout le temps accordé par le règlement. Ainsi dans le travail préparatoire les questions se présenteront dans l'ordre suivant : la question de théorie, l'équation du lieu géométrique à discuter, le problème, sauf à rétablir ensuite dans la copie, qui devra être remise dans les formes prescrites, l'ordre primitif des questions proposées.

Enfin nous recommandons aux candidats l'observation de l'article du règlement qui exige que l'écriture soit lisible. Cette remarque est plus importante qu'on ne serait tenté de le croire au premier abord. Une mauvaise écriture jette toujours une certaine défaveur sur le fond de la composition. Ici surtout, la nature de la composition elle-même nécessite une attention particulière : les calculs doivent être

présentés d'une manière nette et détachée ; les figures doivent être faites avec soin : car, au seul aspect du dessin du lieu géométrique on ne manquera pas de juger si la question a été parfaitement traitée, si la discussion a été complète.

Les candidats pourront s'exercer à traiter les questions suivantes comme sujets de composition mathématique.

501. Démontrer que le cercle est la limite des polygones réguliers isopérimètres.

502. Trouver les conditions d'équilibre d'une tige cylindrique homogène s'appuyant sur deux plans inclinés.

503. Former une équation dont les racines soient les rapports par quotient des carrés des racines d'une équation proposée.

504*. Déterminer le centre de gravité d'un segment de sphère à une base.

505. Connaissant $\sin a$, déterminer $\sin \frac{1}{5} a$; démontrer la réalité des 5 valeurs.

506. Discuter et construire la courbe

$$\rho = \frac{3 \sin \omega}{\sin^2 \omega - \cos^2 \omega}.$$

507* Déterminer la relation qui existe dans tout triangle rectiligne entre les rayons des cercles inscrit et circonscrit et la distance des centres.

508*. Connaissant la somme des termes d'une proportion

continue par quotient et la somme des carrés de ces termes, déterminer la proportion.

509*. Discuter et construire la courbe

$$y=\frac{1-2x+x^2}{x^3+qx-9}.$$

510. Trouver quatre nombres en proportion, connaissant leur somme, celle de leurs carrés et celle de leurs quatrièmes puissances.

511*. Déterminer un triangle, connaissant le contour, un côté et le rayon du cercle circonscrit.

512*. Trouver le centre de gravité d'une sphère formée de deux hémisphères de densités différentes.

Au lieu de deux hémisphères on pourra considérer le cas de deux segments inégaux.

513. Trouver les conditions pour qu'une équation d'un degré m ait n racines qui forment une progression par différence dont la raison r soit un nombre donné, et déterminer ces racines.

514*. Discuter et construire la courbe

$$y=\pm\frac{\sqrt{x^3-24x+8}}{\sqrt{x^3-2x^2-4x+8}}.$$

515*. Déterminer la courbe que décrit le centre de gravité d'un triangle assujetti à s'appuyer constamment par deux de ses sommets sur deux droites fixes perpendiculaires.

516*. Etant donné les angles, le périmètre et la surface d'un trapèze, calculer ses côtés.

517*. Etant donné le sommet de la parabole et deux points de la courbe, déterminer la parabole.

518*. Entre deux droites fixes convergentes, OX, OY, on a placé de toutes les manières possibles une droite MN d'une longueur donnée : trouver le lieu géométrique des points d'intersections successives de ces droites MN,

1° Les droites fixes faisant entre elles un angle donné,

2° Les droites fixes étant perpendiculaires.

519*. Discuter et construire la courbe

$$x^2y^2-2xy-x^2+x+1=0.$$

520*. On donne une ellipse et une hyperbole ayant même centre et mêmes foyers : on demande l'angle que font les tangentes à ces courbes à leurs points d'intersection.

Examiner le cas particulier où les deux courbes auraient un même axe.

521*. Déterminer le centre du cercle osculateur en un point donné de l'ellipse.

Trouver l'équation de la développée, et le rayon de courbure en un point quelconque de cette courbe.

Appliquer le même calcul à l'hyperbole et à la parabole, et trouver les équations des développées de ces courbes et les rayons de courbure en un point quelconque, etc.

522*. Discuter et construire la courbe

$$x^2y^2+x^3y-x^2y+2=0.$$

526*. Trouver les quantités dont le cube est

$$-9+46\sqrt{-1}.$$

524*. Connaissant un système de diamètres conjugués de l'ellipse, de grandeur et direction, déterminer les axes, les foyers, la normale à l'extrémité de ces diamètres, etc.

525*. Déterminer le lieu des points de rencontre des normales à la parabole perpendiculaires entre elles; et par quel point du plan de la courbe ne peut-on mener que deux normales perpendiculaires?

526*. Discuter et construire la courbe

$$y=\pm\sqrt{2ax}\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

527*. Par le sommet A d'une parabole on mène des cordes infiniment rapprochées, telles que AM′, AM″, et par les points d'intersection M′, M″, des perpendiculaires à ces cordes, M′P, M″P: déterminer le lieu géométrique des points d'intersection P de ces perpendiculaires (fig. 72).

528*. De toutes les ellipses qu'on peut circonscrire à un trapèze, quelle est la plus grande ou la plus petite?

529. Discuter et construire la courbe

$$(x^3+5x-5)y^2-(x^2-3x+1)=0.$$

530*. Menez dans un cercle deux diamètres perpendiculaires AB, CD (fig. 74); portez BC de B en E sur le diamètre AB, et du point A comme centre, avec un rayon égal à AE, décrivez un arc de cercle, qui coupe la circonférence en F au dessous du diamètre AB par rapport au point C; la corde CF est à peu près le côté du carré équivalent au cercle : déterminer l'approximation.

531. Calculer le volume du solide décrit par la révolution d'un octogone régulier autour d'un de ses diamètres, le rayon du cercle circonscrit étant pris pour unité.

532. Résoudre l'équation

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0,$$

sachant que ses racines sont en proportion par différence.

533*. Etant donné un point I et deux droites AB, AC (fig. 75), on mène par ce point des sécantes en nombre quelconque, telles que IQN, rencontrant en Q et en N les droites données, et sur ces sécantes on porte, à partir du point I, des longueurs IM égales à la partie QN de la sécante comprise entre les droites données : quel est le lieu géométrique des points M?

534*. Par un point donné mener une normale à l'ellipse.

Quelle position doit avoir le point donné pour que le problème puisse être résolu au moyen de la règle et du compas?

535. Discuter et construire la courbe

$$(y^2-1)x^2-(2y-1)x+1=0.$$

536*. Etant donné une courbe du 2e degré mobile autour de son foyer, on mène à cette courbe, dans chacune de ses positions, une tangente parallèle à une droite donnée dans son plan, et qui rencontre généralement l'axe de la courbe en un point : trouver le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes et de l'axe mobile de la courbe.

537. Démontrer que deux pyramides triangulaires sont semblables lorsqu'elles ont leurs arêtes proportionnelles.

538*. Etant donné deux courbes du 2e degré situées d'une manière quelconque dans un plan, par tous les points de la première on mène des tangentes à cette courbe, qui rencontrent la seconde généralement en deux points, par lesquels on mène les tangentes à cette seconde courbe : quel est le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes ? Ou, autrement dit, quel est le lieu géométrique des pôles de toutes les cordes de l'une qui sont tangentes à l'autre courbe ?

539. Discuter et construire la courbe

$$y=\frac{x^3-1}{x^3-3x-2}.$$

540*. Etant donné trois droites convergentes OA, OC, OB (fig. 77), et un point P, dans le même plan, on mène par ce point des sécantes telles que PMN, PM'N', etc., qui rencontrent les droites extrêmes OB, OA, aux points M et N, M' et N', etc. ; ensuite, après avoir rabattu par des arcs de cercle OM et OM' sur OC en O*m*, O*m'*, etc., on mène les droites N*m*, N'*m'*, etc. :

1° Démontrer que toutes ces droites N*m*, N'*m'*, etc., se rencontrent en un même point I.

2° Déterminer la position de ce point pour chaque position particulière du point P.

3° Si le point P parcourt une droite parallèle à OA ou OB, quel sera le lieu géométrique des points I?

4° Discuter tous les cas de position du point P, des valeurs des angles des droites données, etc.

541. Démontrer que la pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme qui a même base et même hauteur.

542. Partager un angle donné en deux parties telles que le rapport de leurs sinus ou de leurs cosinus soit égal à un rapport donné.

543*. Discuter la courbe

$$y^2-2xy+4x=0.$$

Déterminer par le calcul la grandeur et la direction des axes, 1° soit en cherchant la valeur minimum de la distance du centre à un point de la courbe, 2° soit en se servant des formules de transformation des coordonnées. On supposera les axes primitifs rectangulaires.

544. Étant donné l'équation

$$x^3-9x^2+26x-24=0,$$

former une équation dont les racines soient les sommes deux à deux des racines de la proposée.

Vérifier l'équation obtenue par la résolution de l'équation proposée.

545*. Trouver le lieu géométrique des sommets d'une parabole qui glisse le long d'une parabole égale, en restant toujours tangente à cette dernière.

546. Etant donné les trois côtés d'un triangle sphérique et le rayon de la sphère, comment déterminer, par une construction graphique, la surface du triangle ?

547. Inscrire la plus grande ellipse possible dans un triangle donné.

548. Etant donné tang $\frac{1}{2}a$, déterminer tang$4a$.

549*. Etant donné une ellipse dans un plan, on suppose que la courbe tourne autour de chacune de ses tangentes en faisant autour d'elle une demi-révolution, jusqu'à ce qu'elle vienne se rabattre sur le même plan : quel est le lieu géométrique des diverses positions qu'occupera un point pris à volonté sur le grand axe, après le rabattement de l'ellipse.

550. Discuter et construire la courbe

$$\rho = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}{1-\sin^2\omega}.$$

551. Etant donné les rayons des bases parallèles d'un segment sphérique et sa hauteur, déterminer le rayon de la sphère.

552. Etant donné les volumes d'un cylindre et d'un cône superposés par leurs bases égales et la hauteur totale, déterminer les dimensions des deux solides.

553*. Décrire un cercle qui passe par un point donné et qui coupe deux droites données, chacune sous une corde d'une longueur donnée.

554. Calculer à 0,01 près le rayon du cercle, connaissant la surface du dodécagone inscrit $S = 3^{mc},4258$.

555. Démontrer que les côtés de l'hexagone, du décagone et du pentagone réguliers, forment un triangle rectangle, dont ce dernier est l'hypoténuse.

Déduire de ce théorème une construction géométrique des côtés du décagone et du pentagone réguliers inscrits dans un cercle donné.

556*. Mener une tangente commune à deux courbes concentriques du 2e degré.

557. Déterminer en nombres entiers les côtés d'un rectangle tel que son contour contienne deux fois autant de mètres que sa surface contient de mètres carrés.

558. Décrire un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés.

559. Déterminer le segment de sphère à une base, connaissant le rayon de la sphère et l'arc générateur du segment.

560. Une corde d'une longueur donnée étant fixée à ses deux extrémités non situées sur une droite horizontale, quelle sera la position d'équilibre d'un poids assujetti à couler le long de la corde détendue.

561. **Résoudre l'équation**

$$x^4-3x^3+7x^2-3x+1=0.$$

562. Discuter et construire la courbe

$$y^2x^2-8xy+9x-4=0.$$

563. Calculer la profondeur d'un puits, connaissant le temps qui s'est écoulé depuis le moment où l'on a laissé tomber un corps pesant et le moment où le bruit de la chute s'est fait entendre. Le son parcourt 330 mètres par seconde.

564*. Partager la surface d'un triangle donné en deux parties dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, et telles que la droite qui joint les centres de gravité des deux parties soit perpendiculaire à la droite qui opère la division du triangle.

565. Démontrer que le volume d'un tronc de prisme quadrangulaire est égal au produit de la base inférieure par la distance du centre de gravité de la base supérieure.

566. Résoudre l'équation

$$x^5+px+q=0,$$

sachant que les racines sont en progression géométrique.

567. Etant donné deux équations

$$x^2+px+q=0,$$
$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

former une équation qui ait pour racines les différences deux à deux des racines des équations proposées.

568. Démontrer qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers.

569. Construire une ellipse semblable à une ellipse donnée et équivalente en surface à un cercle donné.

570. Dans une coupe à parois minces et polies exactement hémisphérique et placée sur un plan horizontal, on propose 1° de mettre en équilibre une tige pesante, homogène et polie, de manière que cette tige touche par son extrémité le fond de la coupe, et s'appuie en un point de sa longueur sur le bord horizontal.

On donne la longueur $2l$ de la tige et le rayon r de la coupe.

2° Quand cette tige est en équilibre, quelle est la longueur de la partie comprise dans la coupe?

3° Déterminer l'angle que fait la tige avec la verticale.

571*. Une droite de longueur constante se meut de manière que ses deux extrémités soient toujours sur les deux côtés d'un angle donné :

1° Trouver le lieu géométrique décrit par un point marqué à volonté sur la droite mobile ;

2° Considérant cette droite dans une quelconque de ses positions, si l'on élève par ses deux extrémités des perpendiculaires aux deux côtés de l'angle donné et par le point décrivant une normale à la courbe qu'il trace, les deux perpendiculaires et la normale concourront au même point ;

3° Déterminer le lieu géométrique des points de concours de ces trois droites pour toutes les positions de la droite mobile.

572. Discuter et construire la courbe

$$\rho^2 - 3\rho\cos\omega - \sin^2\omega = 0.$$

573*. Parmi tous les triangles de même surface et de même contour, trouver celui dans lequel la distance entre les centres de gravité de la surface et du contour est un maximum, et déterminer cette distance.

574. Résoudre l'équation

$$x^6-1=0.$$

575. Etant donné les trois angles dièdres d'un angle trièdre, déterminer les angles rectilignes des faces.

576*. Quelle est la position la plus avantageuse pour se tenir solidement debout?

Autrement dit, quelle est la direction que l'homme doit donner à ses pieds, supposés réduits à leurs axes, pour que l'aire du trapèze de sustentation soit un maximum?

577. Construire les courbes

$$xy-1=0,$$
$$x^2-2xy-y^3=0;$$

déterminer à moins de 0,1 près les coordonnées des points d'intersection.

578. Connaissant le volume d'un tétraèdre régulier, déterminer par le calcul le rayon de la sphère inscrite.

579. Diviser en deux parties égales un secteur elliptique donné par une droite menée du centre.

580. Démontrer que la somme de deux cordes conjuguées quelconques menées par un des foyers ou par les foyers d'une ellipse est constante : déterminer cette somme.

581. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel que la somme de ses distances aux trois sommets soit un minimum.

582*. Etant donné un côté, le rayon du cercle inscrit et la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit, déterminer le triangle.

583. Etant donné une équation $f(x)=0$, former une seconde équation dont les racines soient les sommes deux à deux des carrés des racines de l'équation proposée.

584*. Trouver par la méthode la plus générale la relation des diamètres conjugués des courbes du 2e degré pourvues d'un centre.

585. Étant donné la somme et le produit de trois nombres en progression par quotient, déterminer ces trois nombres.

586. Démontrer que la surface d'un triangle quelconque est égale à la racine carrée du produit des quatre rayons des cercles tangents aux trois côtés.

587*. Etant donné une ellipse mobile autour de son centre, on mène à la courbe une tangente parallèle à une droite donnée.

Déterminer le lieu géométrique des points d'intersection de la tangente et du grand axe de l'ellipse.

528. Discuter et construire la courbe

$$(y^2-x)(x-1)-3x^2=0.$$

589*. Quelle doit être la longueur de la base supérieure CD (fig. 86) d'un trapèze rectangulaire ABCD, dont la base inférieure AB est donnée, pour que, le trapèze étant suspendu par l'extrémité supérieure C du côté oblique, la base reste horizontale.

590*. Etant donné la surface, le périmètre et l'un des angles d'un triangle, calculer le côté opposé.

591*. Discuter et construire la courbe

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$

592*. La première année de l'ère chrétienne était la 10e du cycle solaire, période de 28 années juliennes après lesquelles les jours de la semaine reviennent dans le même ordre aux mêmes jours du mois; la 2e du cycle lunaire, ou nombre d'or, période de 19 années juliennes après lesquelles les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de l'année; enfin la 4e d'une autre période de 15 années juliennes, appelée cycle d'indiction, relative à certains actes administratifs chez les Romains:

Quelle est dans le 19e siècle l'année qui compte 27 de cycle solaire, 15 de nombre d'or et 11 de cycle d'indiction?

593. Partager un tronc de cône en deux parties dans le rapport de m à n par un plan parallèle aux deux bases.

594*. Un cercle C (fig. 88) roule sur la circonférence d'un cercle O immobile; pendant ce mouvement un point M pris au dedans ou au dehors du cercle mobile, et invariablement fixé au centre, décrit une courbe; dont on demande l'équation.

(Equation générale des épicycloïdes, en termes finis.)

595. Déterminer la surface du pentédécagone régulier en fonction du rayon du cercle circonscrit.

596*. Etant donné une courbe du 2e degré, mobile autour de son sommet, on mène à cette courbe, dans chacune de ses positions, une tangente parallèle à une droite donnée : trouver le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes avec l'axe de la courbe.

597*. Inscrire dans une ellipse donnée un triangle équilatéral dont un des côtés passe par le centre.

598. Quel est le nombre d'éléments qui, combinés 4 à 4, donnent 35 combinaisons ?

599*. Inscrire dans une courbe du 2e degré donnée un triangle dont les trois côtés soient assujettis à passer par trois points donnés.

600*. Etant donné deux plans inclinés formant avec l'horizon des angles donnés θ et θ', et deux sphères C et C' (fig. 94) inégales, mais chacune homogène, et de rayon r et r', de sorte que leurs poids p et p' soient exprimés par

$$p=\frac{4}{3}\pi d r^3, \qquad p'=\frac{4}{3}\pi d' r'^3,$$

d et d' étant leur densité; mettre ces sphères en équilibre entre les deux plans en les faisant appuyer chacune sur un des plans et l'une contre l'autre.



—

COMPOSITION TRIGONOMÉTRIQUE.

La composition trigonométrique consiste dans la résolution d'un triangle dont trois éléments sont donnés, parmi lesquels au moins un côté ou plus généralement une fonction quelconque des côtés. Les candidats se serviront des tables de sinus.

Quoique le calcul numérique soit le but principal de cette composition, il est important de démontrer les formules trigonométriques dont on fera usage, ainsi que les diverses transformations qu'on peut être obligé de leur faire subir afin de les approprier au calcul logarithmique.

Les calculs seront disposés avec ordre et clarté, de manière à présenter en tableau la suite des opérations.

Les approximations seront faites convenablement tant pour les angles que pour les côtés, et le résultat sera vérifié, si le temps le permet, par une méthode différente de celle qu'on aura employée pour la solution directe.

Les candidats pourront s'exercer à résoudre les problèmes trigonométriques suivants :

601*. Etant donné les trois côtés d'un triangle

$$a = 175^{m},20, \quad b = 96^{m},35, \quad c = 130^{m},42,$$

déterminer les trois angles A, B, C.

602*. Etant donné deux côtés et l'angle compris

$$a = 229^{m},45, \quad b = 103^{m},30, \quad C = 62^\circ\ 28'\ 40'',$$

déterminer le troisième côté et les deux autres angles, c, A, B.

603. Etant donné un côté et les deux angles adjacents

$$a = 143,9, \quad B = 75^\circ\ 24'\ 30'', \quad C\ 48^\circ\ 39'\ 20'',$$

déterminer les deux autres côtés et le troisième angle, b, c, A.

604. Etant donné deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux

$$a = 78^{m},44, \quad b = 106^{m},27, \quad A = 42^\circ\ 15'\ 50'',$$

déterminer le troisième côté et les deux autres angles, c, B, C.

605*. Etant donné les angles et la surface

$$A = 53^\circ\ 28', \quad B = 82^\circ\ 17'\ 10'',$$
$$C = 44^\circ\ 14'\ 50, \quad S = 3748^{mc},28,$$

déterminer les trois côtés a, b, c.

606*. Etant donné deux côtés et la différence des angles opposés,

$$a = 145^{m},28, \quad b = 98^{m},30, \quad A - B = 12^\circ\ 15'\ 30'',$$

déterminer le troisième côté et les trois angles, c, A, B et C.

607. Etant donné les angles, et 1° la somme, 2° la différence de deux côtés,

$$A=49^\circ\ 20,\quad B=67^\circ\ 42'\ 10'',\quad C=180^\circ-(A+B),$$
$$1^\circ\ a+b=392^m,75,\qquad 2^\circ\ a-b=74^m,3,$$

déterminer les trois côtés a, b, c.

608*. Etant donné un angle, le côté opposé, et 1° la somme, 2° la différence des deux autres côtés,

$$A=63^\circ\ 25',\qquad a=179^m,36,$$
$$1^\circ\ b+c=210^m,79,\qquad 2^\circ\ b-c=43,24,$$

déterminer les deux autres angles et les deux autres côtés B, C, b et c.

609*. Connaissant un angle, le côté opposé et le rectangle des côtés qui comprennent cet angle

$$A=67^\circ\ 42'\ 20'',\quad a=158^m32,\quad bc=12769^{mc},36,$$

déterminer les deux autres côtés et les deux autres angles B, C, b et c.

610*. Etant donné les angles et le périmètre

$$A=72^\circ\ 17',\qquad B=101^\circ\ 42'\ 10'',$$
$$C=180^\circ-(A+B),\quad 2p=a+b+c=543^m24,$$

déterminer les trois côtés a, b, c.



COMPOSITIONS LITTÉRAIRES.

—

La composition de littérature exigée des candidats, et qui fait partie de l'examen écrit, consiste en une version latine et une narration, discours ou dissertation sur un sujet donné d'histoire ou de philosophie. Il est accordé aux candidats six heures pour chacune de ces épreuves.

VERSION LATINE.

La version latine est ordinairement tirée des auteurs expliqués en seconde et en rhétorique. Cependant il n'y a point de règle fixe à cet égard, et les passages à traduire sont extraits indifféremment de Tacite, Cicéron, Tite-Live, Salluste, Valère-Maxime et Quinte-Curce, parmi les prosateurs; d'Horace, Virgile et Lucrèce, parmi les poètes.

Les candidats ne perdront pas de vue que cette épreuve de la version n'a pas seulement pour but de faire apprécier leurs connaissances en latinité, mais aussi, et principalement, de constater s'ils ont été suffisamment exercés à la traduction. Il ne suffit pas d'avoir saisi la pensée de l'auteur, il faut encore la rendre avec toute la précision et l'élégance convenable, en ayant égard à la différence des deux idiomes.

Nous n'avons pas besoin d'insister longuement sur la nécessité pour les candidats d'apporter le plus grand soin à cette épreuve. Ils n'oublieront pas qu'une seconde épreuve

de la même nature les attend dès leur entrée à l'école, précaution jugée sans doute nécessaire afin de rendre inutiles les effets d'une complaisance mal entendue, ou d'une fraude déplorable à laquelle il est toujours honteux d'avoir recours. Les conditions du programme sont et doivent être également impérieuses pour chaque candidat, et nul ne peut les éluder sans compromettre l'intérêt public et souvent son propre intérêt.

Les copies doivent être écrites lisiblement, et, nous n'avons presque pas besoin de le dire, avec une orthographe correcte, ainsi que toutes les autres compositions écrites.

COMPOSITION FRANÇAISE.

Nous n'avons que peu de mots à dire pour faire ressortir l'importance de cette épreuve, qui, mieux que toute autre, peut donner la mesure de l'érudition, du goût et de l'intelligence des candidats. Le temps accordé pour la composition écrite est suffisant pour qu'ils puissent développer convenablement le sujet proposé, de quelque nature qu'il soit, narration, discours ou dissertation. Nous engageons avant tout les candidats à méditer sérieusement le sujet de composition, à tracer dans leur esprit le cadre dans lequel ils croiront devoir faire entrer le développement complet, et à ne commencer à écrire que lorsqu'ils auront réussi à embrasser, comme d'un seul regard, le sujet avec tous ses détails.

Il est presque impossible que le sujet de composition ne donne pas lieu à quelques développements historiques ou géographiques. Les candidats ne laisseront pas échapper l'occasion de faire preuve de connaissance en histoire et en géographie, autant, du moins, que le permettra la nature du sujet : car il n'est pas nécessaire de répéter ici que les

développements doivent concourir à l'effet général de la composition, et que, par conséquent, il faut rejeter comme oiseux et inutile tout détail qui ne serait pas conforme à cette règle générale.

Ne pouvant, sans sortir du cadre que nous nous sommes tracé, exposer ici les règles des divers genres de composition, nous sommes obligé de nous borner à quelques conseils spéciaux sur la manière dont le sujet doit être traité. Nous croyons nécessaire de rappeler aux candidats que cette épreuve a principalement pour objet de constater le mérite d'invention et de style de chacun d'eux. Les pensées seront donc présentées avec ordre; les arguments, les descriptions, exposés avec clarté et précision; le style devra s'accorder parfaitement avec le sujet, simple, tempéré, élevé, selon la nature du sujet lui-même; enfin les candidats achèveront de donner d'eux-mêmes dans cette composition écrite l'opinion que l'examen oral avait fait pressentir, mais seulement dans un ordre spécial d'idées et de travaux intellectuels.

Les conseils que nous avons adressés précédemment sur la partie matérielle de l'épreuve de la version latine s'appliquent exactement à l'épreuve de la composition écrite. Il nous suffira de recommander aux candidats les mêmes soins pour l'écriture et pour l'orthographe, la même attention à éviter des complaisances coupables ou une importunité plus coupable encore, dont l'effet le moins fâcheux serait de mettre à la disposition d'un concurrent plus habile, d'un rival intéressé, le secret de leur ignorance et de leur mauvaise foi.

—

COMPOSITION GRAPHIQUE.

Quant à l'épreuve de la composition de dessin, les termes du programme de concours sont trop explicites pour que nous ayons besoin d'entrer dans de longs détails sur la manière dont les candidats doivent la subir.

Les sujets de la composition de dessin sont ordinairement des académies, que chaque candidat doit tracer en entier et ombrer à moitié dans l'espace de temps fixé par le programme. Nous croyons que les candidats doivent se conformer exactement aux termes du programme, sans faire plus ni moins que l'exigé. Sans doute nn habile dessinateur ponrrait achever en six heures la copie du modèle; tracée et ombrée en entier; mais il serait à craindre que le dessin ne se ressentît de la rapidité.

Les candidats s'attacheront d'abord à reproduire aussi exactement que possible le dessin au trait du modèle; ils ne commenceront à dessiner les ombres que lorsqu'ils se seront parfaitement assurés de l'exactitude de la copie, dans tous les détails de position et de grandeur. Cette vérification de la pose se fait très aisément, comme on sait, à l'aide des horizontales et des verticales auxquelles sont rapportés les points principaux de la figure. Quant aux dimensions, on peut les vérifier également à l'aide d'une longueur choisie pour terme de comparaison. Cette longueur peut être prise arbitrairement; mais nous croyons qu'il est préférable de faire choix de la longueur de la face, qui est le module convenu en dessin artistique de la figure humaine. Ce choix a l'avantage d'abréger le travail de vérification : car, dans les beaux modèles, et ceux qui sont pro-

posés au concours sont de maîtres très habiles (1), les dimensions de la figure ont un rapport connu avec le module.

Les ombres viendront ensuite, toujours parfaitement conformes au modèle. Nous insistons à dessein sur cette remarque, qui est plus importante qu'elle ne le paraît d'abord : car la hachure, autant que l'intensité de l'ombre, sert à faire apprécier le degré de courbure des surfaces. Le pointillé dans les ombres de la figure humaine est un véritable contre-sens.

On comprend que les diverses parties de la figure ne doivent pas être également finies. La tête exige nécessairement plus de soin que le tronc ou les membres, à l'exception des mains et des pieds, qui nécessitent un travail plus délicat.

Enfin les candidats ne remettront leur dessin à l'examinateur qu'après avoir achevé le tracé correct de la partie de l'académie qu'ils n'auront pas ombrée. On sait que c'est un des caractères du dessin linéaire de pouvoir faire juger, par la finesse ou par la force du trait, de la direction de la lumière et de la position des courbes.

---

(1) En général les modèles de composition sont dus aux professeurs de l'école, MM. Lemire et Girard.

TROISIÈME PARTIE.

SOLUTIONS DÉVELOPPÉES.

1. En désignant par x et y les chemins parcourus par les deux voyageurs, et par n le nombre de jours inconnus, on aura évidemment les relations

$$x+y=215, \qquad (1)$$

$$x=(6+(n-1)2)\frac{n}{2}, \qquad (2)$$

$$y=(10+n-1)\frac{n}{2}; \qquad (3)$$

d'où l'on tire, toute réduction faite,

$$3n^2+13n-430=0;$$

et, résolvant,

$$n=10;$$

d'où

$$x=120, \quad y=95.$$

6. Désignant par B, b et h, les bases et la hauteur du trapèze générateur, si par l'extrémité de la plus petite base on mène une parallèle à la hauteur, le trapèze sera décomposé en un rectangle et un triangle rectangle, dont les

surfaces seront exprimées par bh et $\frac{(B-b)h}{2}$, et les distances de leur centre de gravité au côté h par $\frac{b}{2}$ et $\frac{B+2b}{3}$; de sorte que si l'on désigne par x la distance du centre de gravité du trapèze dont l'aire s est exprimée par $\frac{(B+b)h}{2}$ au côté représenté par h, on aura, d'après le théorème des moments,

$$\frac{(B+b)h}{2}x=\frac{hb^2}{2}+\frac{(B-b)(B+2b)h}{2\quad 3};$$

d'où l'on tire, toute réduction faite,

$$x=\frac{B^2+Bb+b^2}{3(B+b)}=\frac{(B^3-b^3)}{3(B^2-b^2)}.$$

Or, le volume du tronc de cône, exprimé par

$$V=\pi\left(\frac{B^2+Bb+b^2}{3}\right)h,$$

peut se mettre sous la forme

$$V=2\pi\frac{(B^2+Bb+b^2)}{3(B+b)}\times\left(\frac{B+b}{2}\right)h=s\times 2\pi x.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Si $b=0$, la formule devient

$$V=2\pi\frac{B}{3}\cdot\frac{Bh}{2}$$

et représente le volume du cône dont B et h sont le rayon de base et la hauteur; d'où l'on conclut encore que le volume du cône est égal à la surface du triangle générateur multiplié par la circonférence que décrit son centre de gravité.

8. Soit

$$Ay^m+By^{m-1}+Cy^{m-2}+Dy^{m-3}+\ldots\ldots=0 \qquad (1)$$

l'équation générale des courbes algébriques, dans laquelle les coefficients A, B, C, D, etc., sont des fonctions de x des

degrés 0, 1, 2, 3, etc., de telle sorte qu'on ait

$$A=a,\quad B=b+b'x,\quad C=c+c'x+c''x^2,$$
$$D=d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots;$$

et soit

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x') \qquad (2)$$

l'équation d'une droite quelconque passant par les points x', y'; x'', y'', pour lesquels on aura les relations

$$Ay'^{m}+By'^{m-1}+Cy'^{m-2}+Dy'^{m-3}+\ldots\ldots=0, \qquad (3)$$
$$Ay''^{m}+By''^{m-1}+Cy''^{m-2}+Dy''^{m-3}+\ldots\ldots=0, \qquad (4)$$

si ces points appartiennent à la courbe. On exprimera que la droite (2) est sécante à la courbe proposée si l'on remplace dans son équation le rapport $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ par la valeur qu'on tirera de la combinaison des équations (3) et (4).

Or, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il est facile de voir qu'on obtiendra une troisième équation dont le premier membre offrira une suite de binômes tels que

$$K(x''^{h}y''^{k}-x'^{h}y''^{k}),$$

lesquels peuvent se mettre sous la forme

$$K\,\frac{(x''^{h}-x''^{h})(y''^{k}+y'^{k})+(x''^{h}+x'^{h})(y''^{k}-y'^{k}).}{2}$$

On voit aussi facilement qu'en divisant tous les termes par $x''-x'$ on aura une partie de ces termes exactement divisible par ce binôme, et donnant des quotients de la forme

$$x''^{h-1}+x'x''^{h-2}+x'^2x''^{h-3}+\ldots\ldots,$$

composés de h termes et multipliés par $\frac{y''^{k}+y'^{k}}{2}$; et l'autre partie renfermera le facteur commun $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, multiplié

par des facteurs de la forme

$$\left(\frac{x''^{h}+x'^{h}}{2}\right)(y''^{k-1}+y'y''^{k-2}+y'^{2}y''^{k-3}+\ldots\ldots).$$

On pourra donc tirer de cette troisième équation la valeur du rapport $\frac{y''-y'}{x''-x'}$; et si l'on exprime que la secante devient tangente à la courbe en faisant $x''=x'$, $y''=y'$, on trouvera sans difficulté que cette valeur est précisément égale à la dérivée de l'équation par rapport à x, divisée par la dérivée de cette même équation par rapport à y, ce quotient étant pris en signe contraire, et les variables x et y étant remplacées par x' et y', coordonnées du point de contact. De sorte que si l'on exprime par $f(x, y)=0$ l'équation d'une courbe algébrique quelconque, et par $f'(x)$, $f'(y)$, les dérivées par rapport à chacune des variables, l'équation de la tangente en un point quelconque x', y', sera généralement

$$y-y'=-\frac{f'(x')}{f'(y')}(x-x').$$

Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à l'une des variables, y par exemple, l'équation de la tangente est de la forme

$$y-y'=f'(x')(x-x'):$$

il ne s'agira donc plus que de savoir déterminer la dérivée d'une fonction quelconque d'une variable.

Si l'on veut déterminer les points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, il faudra égaler à zéro le coefficient de x dans l'équation de la tangente, et les coordonnées de ces points seront données par la combinaison des équations

$$f(x,y)=0, \qquad f'(x)=0.$$

Les points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées seront déterminés par les équations

$$f(x,y)=0, \qquad f'(y)=0.$$

Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à y, les équations

$$f(x)=0 \text{ ou } f(x)=\infty$$

détermineront directement l'abscisse des points pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées.

13. Soient $2y$ et x la base et la hauteur inconnues du triangle, R le rayon du cercle donné, l la longueur donnée, on aura, d'après l'énoncé,

$$2y+x=l, \quad (1)$$

$$y^2=x(2R-x); \quad (2)$$

équations d'une ligne droite facile à construire, et d'un cercle qui n'est autre chose que le cercle donné.

De là cette construction : Par un point quelconque A de la circonférence mener un diamètre indéfini et une tangente ; prendre sur le premier une longueur AG égale à l, sur la seconde une longueur AH égale à $\frac{1}{2}l$; joindre GH, et le point de rencontre B de cette droite et de la circonférence déterminera le triangle demandé. En effet, il suffira de mener la corde BC perpendiculaire au diamètre, et le triangle ABC satisfera à l'énoncé.

Ou bien encore, ce qui revient au même, construire un triangle isocèle GHK dont la base GK, tangente en A à la circonférence, et la hauteur AH, passant par le centre, soient toutes deux égales à la longueur donnée l ; joindre GH et KH, qui détermineront par leur rencontre avec la circonférence les deux points B et C : le triangle ABC est le triangle isocèle demandé.

15. Soient x', y' ; x'', y'' ; x''', y''', les coordonnées des trois sommets : en prenant pour base le côté qui joint les

point x'', y''; x''', y''', et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du point x', y', sur cette base, on aura, en exprimant par S la surface du triangle,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2}\times\frac{(y'-y'')-\frac{y''-y'''}{x''-x'''}(x'-x'')}{\sqrt{1+\left(\frac{y''-y'''}{x''-x'''}\right)^2}};$$

et, toute réduction faite,

$$S=\frac{1}{2}\left[(y'-y'')(x''-x''')-(y''-y''')(x'-x'')\right],$$

ou bien

$$S=\frac{1}{2}\left[(y'x'''-x'y''')+(y''x'''-x''y''')+(y'x''-x'y'')\right].$$

Si l'on savait d'avance que l'expression de la surface est une fonction symétrique des coordonnées des sommets, on aurait pu écrire sur-le-champ la formule précédente, qui doit se réduire à zéro quand les trois sommets se réunissent en un seul et même point.

18. On appelle *centre* d'une courbe un point tel que toute sécante qui y passe a ses points de rencontre avec la courbe situés deux à deux à égale distance de ce point.

Toute sécante à la courbe ne pouvant avoir avec elle un nombre de points communs plus grand que l'exposant de son degré, il suit de la définition précédente que, quand une courbe de degré impair aura un centre, il sera sur la courbe même, puisque les sécantes donneront généralement un nombre impair de rencontres; dans la courbe de degré pair, le centre se trouvera hors de la courbe, à moins qu'un nombre pair de ses branches ne vienne passer par ce point.

Il suit encore de la définition précédente du centre que si l'on transporte l'origine des coordonnées à ce point, chaque point de la courbe dont les coordonnées sont x, y, aura pour correspondant celui dont les coordonnées sont $-x$, $-y$: il faut donc nécessairement que l'équation ne change pas

quand les variables changent en même temps de signe; et par conséquent tous les termes de l'équation rapportés au centre de la courbe devront être de degré pair par rapport aux deux variables, ou bien tous de degré impair. Réciproquement lorsque cette condition sera remplie la courbe aura un centre.

Donc, pour trouver le centre d'une courbe

$$f(x, y)=0,$$

après s'être assuré qu'il n'est pas à l'origine, on transportera cette origine en un point quelconque du plan au moyen des formules

$$x=x'+\alpha, \qquad y=y'+\beta,$$

et l'on verra si l'on peut déterminer α et β, coordonnées de la nouvelle origine, par la condition que tous les termes de degré impair disparaissent de l'équation transformée, si la courbe est de degré pair, ou tous les termes de degré pair, si la courbe est de degré impair. On obtiendra ainsi un certain nombre d'équations en α et β, qui devront être satisfaites en même temps.

Si cette condition est remplie, le centre est à la nouvelle origine; si non, la courbe proposée n'a pas de centre.

On voit facilement qu'il suffira de résoudre deux équations du 1er degré en α et β; d'où l'on doit conclure qu'il n'y a qu'un seul centre, ou un nombre infini de centres, situés tous sur une ligne droite; et dans ce dernier cas l'équation proposée représente un système de droites parallèles.

24. Soit p le poids de la sphère, d la densité de la substance, x le diamètre cherché; on aura pour déterminer x la relation

$$\frac{\pi x^3}{6}\cdot d=p;$$

d'où

$$x=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi d}}.$$

25. Soient S_1, S_2, S_3, les trois sphères données. Tout plan tangent aux sphères S_1 et S_2 sera également tangent au cône enveloppe de ces deux sphères, qui a pour sommet leur centre de similitude C; de même tout plan tangent aux sphères S_1 et S_3 sera tangent au cône enveloppe à ces sphères, et dont le sommet est à leur centre de similitude C'; par conséquent le plan tangent aux trois sphères passera par la droite CC', et sera tangent à la fois aux deux cônes enveloppes. Donc : cherchez les centres de similitude de chaque système de deux sphères, et par la droite qui joint deux de ces centres menez un plan tangent à l'une des sphères, ce plan sera à la fois tangent aux trois sphères données.

$B^2-4AC=0$; parabole passant par l'origine et tangente en ce point à l'axe des abscisses : car l'on a

$$x=y\pm\sqrt{4y}.$$

Son diamètre, $x=y$, partage l'angle des axes en deux parties égales.

Pour avoir un point de la courbe on fera $y=1$, d'où $x=1\pm2$; et l'on déterminera le paramètre relatif à ce système de diamètres conjugués.

27. On nomme généralement *diamètre* d'une courbe le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles. Les diamètres sont des lignes droites ou des courbes, selon le degré des équations qui les représentent.

D'après cette définition, pour trouver le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à une direction donnée

$$y=ax$$

menées dans une courbe donnée

$$f(x,y)=0, \qquad (1)$$

si l'on suppose que, x', y', représentant les coordonnées du milieu d'une quelconque de ces cordes, on ait transporté l'origine à ce point, l'équation résultante sera

$$f(x+x', y+y')=0, \qquad (2)$$

et l'équation de la corde

$$y=ax. \qquad (3)$$

Si l'on substitue dans l'équation (2) la valeur de y tirée de l'équation (3), on aura une équation

$$f[(x+x'), (ax+y')]=0, \qquad (4)$$

laquelle devra avoir au moins deux racines égales et de signe contraire.

Cette condition est facile à trouver. En effet, si l'équation (4) est de la forme

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3} \ldots\ldots Tx+U=0,$$

m étant un nombre pair, on devra avoir en même temps

$$x^m-Px^{m-1}+Qx^{m-2}-Rx^{m-3} \ldots\ldots Tx+U=0\ ;$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$x^m+Qx^{m-2} \ldots\ldots +U=0, \qquad (5)$$

$$Px^{m-1}+Rx^{m-3} \ldots\ldots +Tx=0. \qquad (6)$$

On cherchera le commun diviseur entre (5) et (6), après avoir supprimé le facteur x commun à tous les termes de cette dernière, et l'équation finale sera la condition demandée. On opérerait d'une manière tout à fait semblable si n était impair.

Cette équation exprimée en x', y' et a, est l'équation générale des diamètres de la courbe $f(x, y)=0$.

On déterminera les diamètres rectilignes, s'il en existe, en cherchant les valeurs de a qui introduiront dans cette

équation des facteurs rationnels du 1er degré en x' et y'. On verra de plus si parmi ces diamètres il y en a qui soient perpendiculaires sur leurs cordes ; ces diamètres ont reçu le nom d'axes.

32. Le nombre fractionnaire $3\frac{1}{2}$ égale $\frac{7}{2}$,

et par conséquent

$$\sqrt{3\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{\frac{7.32}{2.32}}=\frac{\sqrt{224}}{8}=\frac{14}{8}=1\frac{3}{4}.$$

33. Soient a, b, c, les côtés d'un triangle quelconque ; désignons par h la perpendiculaire abaissée du sommet sur le côté a pris pour base, et par x la distance du sommet de l'angle adjacent à ce côté a au pied de la perpendiculaire ; on aura, en désignant la surface par S,

$$S=\frac{ah}{2}. \tag{1}$$

Or

$$h=\sqrt{b^2-x^2}, \tag{2}$$

$$h=\sqrt{c^2-(a-x)^2}. \tag{3}$$

Eliminant x entre ces deux équations, on trouvera d'abord, en élevant au carré les équations (2) et (3), et retranchant l'une de l'autre,

$$x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

d'où

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}=$$

$$\sqrt{b+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}}\ \sqrt{b-\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}},$$

et, toute réduction faite,

$$h=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b)^2-c^2}\ \sqrt{c^2-(a-b)^2},$$



d'où

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\,.$$

Et, si l'on fait $a+b+c=2p$,

$$h = \frac{4}{2a}\sqrt{p(p-a)(p-b)p-c)}\,;$$

d'où

$$S = \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

37. $B^2-4AC=0$; parabole passant par l'origine; de l'équation on tire $y=3x\pm\sqrt{2x}$.

Diamètre $y=3x$; l'axe des ordonnées est tangent à la courbe.

Il suffira de connaître un seul point de la courbe pour construire le paramètre relatif à ce système; et, afin de rendre la valeur de y rationnelle, on prendra $x=2$, ce qui donne $y=6\pm2$.

38. Etant donné une équation $f(x,\,y)=0$, si l'on peut la résoudre par rapport à l'une des variables, y par exemple, on obtiendra une valeur $y=\varphi(x)$, dans laquelle le 2e membre sera une certaine fonction de la seconde variable, entière, fractionnaire, renfermant des radicaux, etc.; ce qui annonce l'existence de plusieurs branches, que l'on discutera séparément.

En faisant passer la variable x par toutes les valeurs possibles depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pm\infty$, on obtiendra pour y des valeurs correspondantes, et chaque couple de valeurs déterminera un point de la courbe proposée. On pourra s'assurer par ce moyen si la courbe est finie ou infinie; continue où composée de plusieurs branches séparées; si ses points vont en s'éloignant ou en s'approchant des axes coordonnés, et l'on aura ainsi une idée approximative du cours général de la courbe.

Si l'équation ne peut être résolue par rapport à l'une des variables, on donnera pareillement à x toutes les valeurs depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pm\infty$, et l'on obtiendra par la substitution de chaque valeur, $x=a$, par exemple, dans l'équation proposée, une équation $f(a, y)=0$, à laquelle on appliquera les méthodes connues pour la résolution des équations numériques à une seule inconnue. Soient b, b', b'', etc., les racines réelles de cette équation; les couples de valeurs

$$\begin{matrix} x=a & x=a & x=a \\ y=b & y=b' & y=b'' \text{ etc.,} \end{matrix}$$

détermineront autant de points de la courbe.

On voit déjà combien cette méthode est longue et pénible, combien, surtout, elle est insuffisante pour faire connaître d'une manière approfondie la nature de la courbe, la direction de son cours, ses inflexions, sa courbure, etc. Aussi doit-on avoir recours à d'autres moyens qui puissent donner une idée nette et exacte de son étendue, de sa forme et de ses propriétés.

Parmi ces moyens, le plus simple consiste à comparer la courbe proposée à d'autres lignes, droites ou courbes, dont la direction bien connue peut faire apprécier la direction de la première: ces lignes sont les tangentes et les asymptotes.

On sait que la tangente en un point quelconque x', y'; d'une courbe $f(x, y)=0$, a pour équation

$$y-y'=-\frac{f'(x')}{f'(y')}(a-x'),$$

$f'(x)$, $f'(y)$, désignant les dérivées de l'équation par rapport à ces variables. On pourra, en chaque point de la courbe, déterminer la direction de cette droite, et s'assurer si la courbe, dans les environs du point de contact, passe au dessus ou au dessous de la tangente.

Si l'on représente par t le coefficient de x dans l'équation

de la tangente, on cherchera les valeurs de x et de y pour lesquelles $t=0$ ou $t=\infty$, c'est-à-dire les points où la tangente est parallèle aux axes, ce qui se fera en combinant successivement les équations

$$f(x, y)=0, \qquad f(x, y)=0,$$
$$f'(x)=0; \qquad f'(y)=0.$$

Lorsque l'équation peut être résolue par rapport à chacune des variables, le calcul est évidemment très simple, car toute la difficulté se réduit à la résolution de l'équation

$$f'(x)=0 \text{ ou } f'(y)=0.$$

Quand on a déterminé un assez grand nombre de points de la courbe, on peut déterminer à peu près sa forme et son étendue; mais il reste toujours un peu d'incertitude sur sa courbure, même en se servant de la tangente, surtout quand la courbe a des branches infinies. Dans ce cas, on aura recours aux asymptotes, qu'il sera toujours facile de déterminer lorsque l'équation est résolue.

En effet, si la valeur de la variable dépendante est une fonction fractionnaire et rationnelle de l'autre, de la forme

$$y=\frac{P}{Q},$$

P et Q étant des fonctions de x, après avoir simplifié la fraction s'il y a lieu, on obtiendra une valeur

$$y=G+\frac{H}{Q},$$

de laquelle on voit qu'à toutes les valeurs de x tirées de $Q=0$ correspondront des valeurs infinies de y, et que pour $x=\infty$ on aura $y=G$.

Si la valeur de y renferme des radicaux, on extraira la racine indiquée, d'après la méthode algébrique connue; il suffira de pousser l'approximation jusqu'aux premiers termes qui contiendront la variable x en dénominateur, et l'on retombera dans le cas précédent.

Enfin on déterminera les points multiples, c'est-à-dire les points ou deux ou plusieurs branches de la courbe viennent se croiser; ce qui ne présentera aucune difficulté, lorsque l'équation proposée sera résolue : car il suffira d'égaler entre elles les diverses déterminations algébriques que fournit l'expression générale de l'ordonnée quand on met le signe $\pm$ devant les radicaux pairs; ou de prendre successivement les diverses déterminations imaginaires des radicaux simples, d'égaler à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le résultat imaginaire de leur combinaison, et de chercher les racines réelles des équations irrationnelles ainsi obtenues.

Si l'équation ne peut être résolue, on cherchera la condition pour que l'équation proposée ait des racines égales de y; l'équation finale en x déterminera les abscisses des points multiples.

Dans tous les cas, on s'assurera de la nature des points singuliers ainsi trouvés, points isolés, rebroussements des diverses espèces, inflexions, par la discussion de la courbe et de la tangente aux environs de ce point.

La détermination du centre et des diamètres offrira aussi le moyen de vérifier la forme de la courbe, ainsi que ce principe général, qu'on ne manquera pas d'appliquer dans chaque cas particulier : une courbe quelconque ne peut avoir avec une ligne droite un nombre de points communs plus grand que le degré de son équation (1).

---

(1) La méthode générale que nous venons d'exposer suffit en général pour la discussion et la construction des courbes de la nature de celles que l'on

42. Réduisant les nombres fractionnaires donnés au même dénominateur, on pourra les remplacer par les fractions équivalentes

$$\frac{30}{12} \qquad \frac{40}{12} \qquad \frac{45}{12}$$

et la question revient à partager le nombre 690 en trois parties qui soient entre elles dans le rapport des nombres

30, 40, 45,

dont la somme $= 115$.

---

donne à discuter à l'examen d'admission. Toutefois nous croyons devoir ajouter quelques développements, à l'usage des élèves qui connaissent la théorie des dérivées.

On démontre d'après cette théorie que, si l'on remplace x par $x+h$ dans une équation résolue de la forme

$$y = f(x), \qquad (1)$$

la valeur de y prend la forme

$$y' = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1.2} h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3} h^3 + \ldots..$$

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., étant les dérivées première, seconde, troisième, etc., du deuxième membre de l'équation proposée.

En outre, la tangente en un point x', y', de la courbe, ayant pour équation

$$y - y' = f'(x')(x - x'), \qquad (2)$$

si l'on fait $x = x' + h$, on aura, pour la tangente,

$$y - y' = f'(x')h,$$

et pour la courbe,

$$y - y' = f(x'+h) - f(x') = f'(x')h + \frac{f''(x')}{1.2} h^2 + \ldots..;$$

d'où l'on voit que l'accroissement de l'ordonnée sera plus grand pour la courbe que pour la tangente, quel que soit le signe de h, si l'on a

Or, si l'on observe que $690 = 115 \times 6$, on trouvera sur le champ que les trois parties demandées sont

$$180, \quad 240, \quad 270.$$

On trouvera les mêmes valeurs par la méthode générale; en effet désignant par x, y, z, les trois parties cherchées, on aura la suite de rapports égaux

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45}.$$

$f''(x') > 0$. L'inverse aura lieu si $f''(x') < 0$. Si donc $f'(x')$ est positif, les points de la courbe seront plus éloignés de l'axe des x que les points de la tangente correspondants à la même abscisse dans le cas où l'on aura $f''(x') < 0$, et la courbe sera convexe vers l'axe des x; elle sera concave vers cet axe dans le cas de $f''(x') < 0$. Si, au contraire, $f'(x)$ était négatif, il y aurait convexité pour $f''(x') < 0$, et concavité pour $f''(x') > 0$.

Maintenant si la convexité se change en concavité et réciproquement; ou, autrement dit, s'il y a inflexion, la fonction $f''(x)$ passera du positif au négatif et réciproquement, ce qui ne peut se faire qu'en passant par zéro ou par l'infini; il faudra donc qu'on ait $f''(x) = 0$ ou $f''(x) = \infty$, équations qui détermineront les abscisses des points d'inflexion.

Si la courbe n'était pas résolue par rapport à l'une des variables, comme on sait trouver les dérivées successives d'une équation

$$F(x, y) = 0,$$

on obtiendra les coordonnées des points d'inflexion par la combinaison des équations

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad F(x,y) = 0$$
$$F''(x,y) = 0 \qquad\qquad F''(x,y) = \infty.$$

Au surplus, la discussion des courbes étant une des applications importantes du calcul différentiel, c'est là qu'il faut étudier la méthode générale. Tout ce que l'on pourrait ajouter à la méthode que nous avons exposée ne serait autre chose que du calcul différentiel plus ou moins habilement déguisé.

Dans une suite de fractions égales, la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs donnant une fraction égale aux proposées, on aura, en ayant égard à $x+y+z=690$,

$$\frac{x}{30}=\frac{690}{115}=6;\quad \text{d'où } x=180.$$

$$\frac{y}{40}=6;\qquad y=240.$$

$$\frac{z}{45}=6;\qquad y=270.$$

43. Deux conditions: car en désignant par A, B, C, a, b, c; A′, B′, C′, a', b', c', les angles et les côtés de deux triangles semblables, on ne peut avoir que les trois cas de similitude

1° $\quad A=A', \qquad B=B';$

2° $\quad A=A', \qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'};$

3° $\quad \frac{a}{b}=\frac{b'}{c'}, \qquad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'};$

ce qui ne fait jamais que deux conditions.

Si deux triangles sont tels que leurs surfaces soient dans le rapport des carrés de deux de leurs côtés, les triangles ne sont pas semblables.

Il faut nécessairement que les angles compris par ces côtés soient égaux, ou que les surfaces soient dans le rapport des carrés des trois côtés.

48. $B^2-4Ac=b^2-4$; donc la courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que

$$b<\pm 2,\qquad b>\pm 2,\qquad b=\pm 2,$$

et dans ce dernier cas l'équation représente le système de deux droites parallèles.

Dans ce dernier cas encore, ainsi que dans le premier cas, si $a<0$, la courbe est imaginaire.

55. Aigu : car $(20)^2<(15)^2+(18)^2$.

57. 1° Soit, en prenant les axes fixes pour axes coordonnés, les équations de deux droites consécutives

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1, \quad (1)$$

$$\frac{y}{\beta'}+\frac{x}{\alpha'}=1; \quad (2)$$

et les relations

$$\alpha+\beta=l, \quad (3)$$

$$\alpha'+\beta'=l. \quad (4)$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$\left(y-\frac{(\beta+\beta')}{2}\right)+\left(x-\frac{(\alpha+\alpha')}{2}\right)\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}=0;$$

et des équations (3) et (4),

$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}=-1;$$

d'où

$$\left(y-\frac{(\beta+\beta')}{2}\right)-\left(x-\frac{(\alpha+\alpha')}{2}\right)=0.$$

Faisant $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, pour exprimer la succession immédiate des deux droites, on a

$$(y-\beta)-(x-\alpha)=0. \quad (5)$$

Combinant entre elles les équations (1), (3) et (5), on en conclut facilement

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=l^{\frac{1}{2}},$$

équation de la parabole entre ses tangentes égales.

2° Pour le cas de la différence donnée, on trouvera

$$x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}=l^{\frac{1}{2}}.$$

65. Soit M (fig. 1) le point demandé; de ce point et du centre C menez MP et CD perpendiculaires sur AB, et joignez AC, AM, MB.

Cela fait, soit $AB=2a$, $CD=b$, $AC=MC=r$, $MP=y$. On aura :

$$\text{surf. } AMB=\frac{AB \cdot MP}{2},$$

$$\text{surf. } AMB=\frac{AM \cdot MB \sin M}{2};$$

donc $$AB \cdot MP=AM \cdot MB \sin M;$$

et, à cause de l'énoncé,

$$AB \cdot MP=\overline{MN}^2 \sin M. \qquad (1)$$

A cause des parallèles MP et CD, on a

$$\frac{MN}{CN}=\frac{MP}{CD};$$

d'où

$$\frac{MN}{MC}=\frac{MP}{MP-CD},$$

et

$$\overline{MN}^2=\overline{MC}^2\,\frac{\overline{MP}^2}{(MP-CD)^2}. \qquad (2)$$

Comparant les équations (1) et (2), on en tire l'équation de condition

$$\frac{\mathrm{AB.\,MP}}{\sin \mathrm{M}} = \overline{\mathrm{MC}}^2\, \frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{(\mathrm{MP}-\mathrm{CD})^2}.$$

Réduisant et remplaçant les lignes par leurs valeurs générales on trouve, après avoir ordonné,

$$2ay^2-(4ab+r^2\sin\mathrm{M})y+2ab^2=0\,;$$

et si l'on remarque que $\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\sin\mathrm{ACD}=r\sin\mathrm{M}$, on aura

$$y=\left(b+\frac{r}{4}\right)\pm\sqrt{\left(b+\frac{r}{4}\right)^2-b^2}\,;$$

d'où l'on tire cette construction très facile :

Sur CD prolongé prendre $\mathrm{CE}=\frac{1}{4}\,\mathrm{CG}=\frac{1}{4}\,r$; sur DE décrire une demi-circonférence et construire

$$\mathrm{EF}=\sqrt{\left(b+\frac{r}{4}\right)^2-b^2}=\sqrt{(\overline{\mathrm{DE}}^2-\overline{\mathrm{DC}}^2)}\,;$$

enfin prendre EH ou $\mathrm{E}h=\mathrm{EF}$, et par les points H et h mener parallèlement à AB les sécantes HM ou hm, qui détermineront généralement les quatre points M et M', m et m', qui satisfont à la question.

68. *Première manière.* — Désignant par A', B', les deux diamètres conjugués donnés faisant entre eux un angle donné θ, et par A et B les demi-axes, on a

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2,\quad \mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}\sin\theta\,;$$

d'où

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\sqrt{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2+2\mathrm{A'B'}\sin\theta},$$

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\sqrt{\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2-2\mathrm{A'B'}\sin\theta},$$

et

$$A=\frac{1}{2}\left[\sqrt{A'^2+B'^2+2A'B'\sin\theta}+\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\sin\theta}\right].$$

La construction suivante déterminera les axes, de grandeur et de position :

Par l'extrémité B′ (fig. 2) du diamètre donné OB′ abaisser une perpendiculaire B′P sur l'autre diamètre OA′, et prendre $B'D=B'E=OA'=A'$; on aura, d'après la propriété du triangle obliquangle,

$$OE=\sqrt{A'^2+B'^2+2A'B'\sin\theta},$$

$$OD=\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\sin\theta};$$

donc

$$A=\tfrac{1}{2}(OD+OE).$$

Des points B′ et b′, extrémités du premier diamètre, comme centres, et avec un rayon égal à $\frac{1}{2}(OD+OE)$, décrivez des arcs de cercle, qui coupent le second diamètre aux points I, I′; K, K′; joignez B′I, b′K; B′I′, b′K′, et les points de rencontre des droites de jonction

F et F′

seront les foyers de l'ellipse.

Il ne restera plus qu'à mener la droite FF′, qui passera par le centre O; et prenant sur cette droite

$$OA=Oa=\tfrac{1}{2}(OD+OE),$$

on aura la longueur du grand axe dans sa véritable position.

On déterminera facilement le second axe d'après la position connue du foyer.

Deuxième manière. — Si l'on partage en deux parties égales l'angle DOE, la bissectrice est dirigée suivant le grand axe de l'ellipse ; ce qu'on peut démontrer de la manière suivante par l'analyse :

Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et

$$y=ax$$

l'équation d'un diamètre quelconque, désignant par x', y', les coordonnées extrêmes du diamètre, on trouvera par un calcul facile

$$x'=\frac{AB}{\sqrt{A^2a^2+B^2}}$$

$$y'=\frac{ABa}{\sqrt{A^2a^2+B^2}};$$

et pour la longueur de ce demi-diamètre

$$D=\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{AB\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{A^2a^2+B^2}}.$$

Pour un second demi-diamètre D', $y=a'x$, on trouverait de même

$$D'=\frac{AB\sqrt{1+a'^2}}{\sqrt{A^2a'^2+B^2}}.$$

Si D et D' sont conjugués, ce qui donne la relation

$$aa'=-\frac{B^2}{A^2},$$

la valeur de D' devient, toute réduction faite,

$$D'=\frac{\sqrt{A^4a^2+B^4}}{\sqrt{A^2a^2+B^2}}$$

Cela posé, soit

$$y-y'=-\frac{1}{a'}(x-x') \qquad (1)$$

l'équation d'une droite menée par le point x', y', extrémité du diamètre D, perpendiculairement au diamètre D'.

Si l'on prend sur cette perpendiculaire deux distances égales entre elles et à ce second demi-diamètre, de telle sorte qu'on ait

$$(x-x')^2+(y-y')^2=\text{D}'^2=\frac{\text{A}^4a^2+\text{B}^4}{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}, \qquad (2)$$

les coordonnées des points extrêmes E et D de ces distances seront données par la combinaison des équations (1) et (2), et l'on aura

$$x=x'\pm\frac{\text{B}^2}{\sqrt{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}},$$

$$y=y'\pm\frac{\text{A}^2a}{\sqrt{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}},$$

le signe supérieur correspondant au point E, l'inférieur au point D. Substituant pour x' et y' les valeurs trouvées précédemment, et séparant les valeurs des coordonnées, on trouvera

$$x_{\text{E}}=\frac{\text{AB}+\text{B}^2}{\sqrt{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}}, \qquad x_{\text{D}}=\frac{\text{AB}-\text{B}^2}{\sqrt{\text{A}^2a+\text{B}^2}},$$

$$y_{\text{E}}=\frac{\text{AB}a+\text{A}^2a}{\sqrt{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}}, \qquad y_{\text{D}}=\frac{\text{AB}a-\text{A}^2a}{\sqrt{\text{A}^2a^2+\text{B}^2}};$$

et les équations des droites OE, OD, seront

$$\text{OE} \qquad \text{Y}=\frac{\text{A}a\text{X}}{\text{B}},$$

$$\text{OD} \qquad \text{Y}'=-\frac{\text{A}a\text{X}'}{\text{B}}$$

d'où l'on voit que le grand axe de l'ellipse partage l'angle DOE en deux parties égales.

On a d'ailleurs $a^2-b^2=\mathrm{OE}.\mathrm{OD}$: par conséquent les points F, F′, seront déterminés. De là on conclura facilement les axes.

On remarquera comme vérification que

$$\overline{\mathrm{OE}}^2=\overline{x_e}^2+\overline{y_e}^2=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2,$$

$$\overline{\mathrm{OD}}^2=\overline{x_o}^2+\overline{y_o}^2=(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2;$$

d'où

$$\mathrm{OE}=\mathrm{A}+\mathrm{B},\quad \mathrm{OD}=\mathrm{A}-\mathrm{B},$$

et

$$\mathrm{OE}+\mathrm{OD}=2\mathrm{A},\quad \mathrm{OE}-\mathrm{OD}=2\mathrm{B},$$

indépendamment d'aucune valeur de a.

D'après cela on a

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OE}}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HE}};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EO}}=\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{EH}+\mathrm{HD})}{\frac{1}{2}(\mathrm{OE}+\mathrm{OD})}=\frac{\mathrm{EB}'}{\mathrm{A}};$$

par conséquent, en menant $\mathrm{B}'h$ parallèle à HO, on aura $\mathrm{E}h=\mathrm{A}$, $\mathrm{O}h=\mathrm{B}$.

75. Sur les diamètres donnés, comme côtés, construire le parallélogramme; mener les diagonales, qui détermineront les asymptotes; divisant les angles des asymptotes en deux parties égales, on aura la direction des axes; enfin, par une des extrémités de l'un des diamètres conjugués donnés mener des parallèles à la direction des axes : une moyenne proportionnelle déterminera la grandeur de chacun de ces axes.

76. Soit

$$\beta=2p\alpha+q\alpha^2 \qquad (1)$$

l'équation de la courbe du 2ᵉ degré rapportée à son axe

et à son sommet : la sécante issue d'un point $(d, 0)$ pris sur l'axe aura pour équation

$$y = a(x - d). \tag{2}$$

En désignant par α et β les coordonnées du point d'intersection de la parallèle correspondante à l'ordonnée

$$\beta = -ad, \tag{3}$$

l'équation de la droite de jonction sera

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{4}$$

Entre ces quatre équations éliminant α, β et a, on obtiendra une équation finale en x, y, qui sera le lieu géométrique es points d'intersection des droites (2) et (4).

Les équations (2), (3) et (4) donnent

$$\beta = -\frac{dy}{x-d},$$

$$= -\frac{dx}{x-d}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve, toute réduction faite,

$$y^2 = 2px - \left(\frac{2p - qd}{d}\right)x^2;$$

équation d'une courbe du 2e degré.

Cette courbe sera une ellipse dans le cas où

$$(2p - qd) > 0 \quad \text{ou} \quad d < \frac{2p}{q};$$

une hyperbole si

$$2p - qd < 0 \text{ ou } d > \frac{2p}{q};$$

enfin une parabole lorsque

$$2p-qd=0 \text{ ou } d=\frac{2p}{q}.$$

Supposons que la courbe donnée soit une ellipse dont les axes sont 2A et 2B : on a

$$p=\frac{B^2}{A},\ q=-\frac{B^2}{A^2};$$

l'équation du lieu géométrique sera

$$y^2=2\frac{B^2}{A}x-\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{2A+d}{d}\right)x^2,$$

équation qui pourra représenter une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que

$$2A+d \text{ sera } > \text{ ou } < \text{ ou } =0.$$

Tant que d sera positif, la courbe sera une ellipse; si d est négatif et $>2A$ une hyperbole; enfin si d est négatif et égal à 2A, une parabole.

77. Soit pris pour origine des axes rectangulaires le milieu de la base donnée, et l'axe des abscisses dirigé suivant cette base, exprimée par $2b$: les équations des côtés dont l'intersection est le sommet du triangle seront

$$y=a(x+b),$$
$$y=a'(x-b).$$

D'après l'énoncé a' est la tangente du supplément de l'angle triple de celui dont la tangente est a.

Or on a

$$\tang 3\alpha=\tang(2\alpha+\alpha)=\frac{\tang 2\alpha+\tang\alpha}{1-\tang 2\alpha\tang\alpha},$$

$$\text{et } \tang 2\alpha=\frac{2\tang\alpha}{1-\tang^2\alpha};$$

d'où

$$\tang 3\alpha = \frac{3\tang\alpha - \tang^3\alpha}{1 - 3\tang^2\alpha},$$

et par conséquent

$$a' = -\tang 3\alpha = \frac{\tang^3\alpha - 3\tang\alpha}{1 - 3\tang^2\alpha} = \frac{a^3 - 3a}{1 - 3a^2}.$$

Les équations des côtés seront donc

$$y = a\,(x + b),$$

$$y = \left(\frac{a^3 - 3a}{1 - 3a^2}\right)(x - b).$$

Eliminant a entre ces deux équations, on trouve

$$y = \pm (x + b)\sqrt{\frac{x - \frac{1}{3}b}{x + \frac{1}{3}b}}.$$

78. Diamètre parabolique

$$y = x^2,$$

rencontré par la courbe aux points dont les abscisses sont

$$x = \pm 1.$$

Extrayant la racine carrée de $x^4 - 1$, on a

$$y = x^2 \pm \left(x^2 - \frac{1}{2x^2} + \text{etc.}\right).$$

La courbe a deux asymptotes :

$y = 2x^2$, parabole ;
$y = 0$, axe des x.

La courbe est tangente aux droites $x = \pm 1$.

86*. Faire

$$\sqrt{25 - 86\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1},$$

élevant au carré et égalant les rationnelles et les irrationnelles, on aura

$$x^2 - y^2 = 25, \quad 2xy = -86.$$

On résoudra ces équations numériquement ; ou bien on construira les deux hyperboles concentriques, dont la première est équilatère et la seconde rapportée aux diamètres de la première comme asymptotes ; les coordonnées des points communs de ces courbes seront les valeurs des inconnues.

87. Soit DD′, F et TT′ (fig. 3), la directrice, le foyer et la tangente donnés.

Joignez le point T, où la tangente rencontre la directrice, avec le foyer F, et menez MFM′ perpendiculaire à FT : le point d'intersection M de cette droite avec la tangente est le point de contact et appartient à la courbe. Joignez MF, et menez, perpendiculairement à la directrice DD′, les perpendiculaires MP, FG, qui la rencontrent en P et G ; divisez l'angle PMF en deux parties égales par la droite MH ; et, enfin, menez HA, perpendiculaire à FG : le point A est le sommet de la courbe.

La courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que AF<ou>ou=AG.

On déterminera le centre de la manière suivante : menez FQ perpendiculaire à TT′, et joignez AQ ; puis, par le milieu I de cette droite, élevez la perpendiculaire IO, qui, par sa rencontre avec AF prolongée, déterminera le centre de la courbe.

Si la courbe doit être une parabole, AQ sera perpendiculaire à AF, et par conséquent IO parallèle à cette même droite.

88. Soit

$$y^2=2rx-x^2 \qquad (1)$$

l'équation du cercle rapportée au point donné B pris pour origine des coordonnées rectangulaires, et

$$\beta=a\alpha \qquad (2)$$

l'équation d'une sécante quelconque BF. Pour obtenir le point D, milieu de l'arc sous-tendu BDF, il suffira de chercher les coordonnées du point de rencontre du cercle (1) et du rayon perpendiculaire à la sécante (2), lequel rayon a pour équation

$$y=-\frac{1}{a}(x-r). \qquad (3)$$

Eliminant x entre (1) et (3), on trouve pour l'ordonnée du point D l'équation

$$y^2=r^2-a^2y^2\,;$$

et, à cause de

$$y=\beta \text{ et } a=\frac{\beta}{\alpha},$$

on obtient, toute réduction faite,

$$\beta^2(\alpha^2+\beta^2)=r^2\alpha^2\,;$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho=r\cot\omega.$$

On résoudra d'une manière analogue le problème suivant:

Les données étant les mêmes, par le milieu D *des arcs sous-tendus on abaisse des perpendiculaires* CD *sur le diamètre passant par* B *: quel est le lieu géométrique des points de rencontre* E' *des droites* DC *et* BF ?

Il suffira pour le trouver d'éliminer y entre les équations (1) et (3), ce qui donne

$$\frac{(x-r)^2}{a^2}=2rx-x^2\,;$$

14

et, remplaçant x par α et a par $\frac{\beta}{\alpha}$, on trouvera pour équation du lieu géométrique demandé

$$\alpha(\alpha-r)^2=(2r-\alpha)\beta^2.$$

Faisant $\alpha=\rho\cos\omega$, $\beta=\rho\sin\omega$, et réduisant, on trouve

$$\rho=r\frac{(1\pm\sin\omega)}{\cos\omega}.$$

Or on a généralement

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q),$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q);$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q),$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q).$$

Si l'on fait $p=100^\circ$, $q=\omega$, on trouve

$$\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(100^\circ+\omega),$$

$$\frac{1-\sin\omega}{\cos\omega}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(100^\circ-\omega);$$

d'où

$$\rho=r\operatorname{tang}\frac{1}{2}(100^\circ\pm\omega),$$

équation polaire du lieu géométrique demandé.

93. Soit supposé le problème résolu, et C le point demandé.

De la relation donnée on tire

$$AC+CD+BD=BC+CD;$$

d'où

$$AC=BC-BD,$$

et

$$\frac{AC}{BC}=1-\frac{BD}{BC}.$$

Soit mené par le centre O le diamètre MN, perpendiculaire à AB, le rayon AO, et la corde CM, qui coupe la corde AB en I; l'angle C étant divisé en deux parties égales par la droite CIM, on a

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AI}{IB}.$$

Le triangle AOH étant semblable à BCD, car ils sont tous les deux rectangles, et l'angle DCB, mesuré par la moitié de l'arc (AC+CB), est égal à AOH, mesuré par $AN=\frac{1}{2}(AC+CB)$, on a

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AH}{AO}.$$

On aura par conséquent

$$\frac{AI}{IB}=1-\frac{AH}{AO}=\frac{AO-AH}{AO},$$

et le problème est ramené

1° A diviser la corde AB au point I en deux parties qui soient dans le rapport

$$\frac{AO-AH}{AO};$$

2° A diviser l'arc AMB en deux parties égales au point M;

Et enfin, en menant la droite MI, on obtient le point demandé C.

97. Désignant par x, y, les coordonnées inconnues du point donné, rapportées à deux axes rectangulaires passant par le sommet donné, on aura

$$y^2=2px, \tag{1}$$

$$y^2+x^2=l^2, \tag{2}$$

l étant la distance du point donné au sommet de la parabole.

On en tire facilement

$$x(x+2p)=l^2.$$

Connaissant la différence de deux côtés contigus d'un rectangle ainsi que sa surface, on déterminera facilement ces côtés, qui représenteront les deux valeurs de x.

Du sommet donné comme centre, et d'un rayon égal à l'une ou à l'autre de ces deux longueurs, on décrira une circonférence; ensuite, du point donné on mènera une tangente à cette circonférence, et la droite qui joindra le sommet et le point de contact sera la direction de l'axe de la parabole.

Le problème a quatre solutions.

98. $B^2-4AC>0$; hyperbole passant par l'origine.

Résolvant par rapport à y,

$$y=2x\pm\sqrt{3x^2+6}.$$

Asymptotes, d'après la règle générale :

$$y=2x\pm\sqrt{3}(x+1).$$

Connaissant les asymptotes et un point de la courbe, on

la construira par points, ou bien l'on déterminera les axes de grandeur et de direction, etc.

Le point donné étant extérieur à la courbe, il y aura deux tangentes, que l'on construira d'après la méthode connue.

On pourra déterminer *à priori* l'équation de la tangente passant par le point donné, et en déduire les coordonnées des points de contact.

105. Menez CD parallèle à GK, et le rayon CO; les triangles semblables CDF, COH, donnent la relation

$$\frac{CF}{CD \text{ ou } HB}=\frac{CO}{CH};$$

d'où, à cause de CF=CH,

$$\overline{CH}^2=CO\,(OB+OH);$$

et, comme $\overline{CH}^2=\overline{CO}^2-\overline{OH}^2$, on a, toute réduction faite,

$$OH(OH+CO)=CO\,(CO-OB)=KO\,.\,KB.$$

Le problème est ramené à construire un rectangle dont on connaît la différence des côtés contigus CO et la surface KO.KB.

108. Du foyer menez une perpendiculaire sur la tangente, et prolongez-la d'une longueur égale à elle-même; l'extrémité de cette longueur est un point de la directrice. De ce point menez les tangentes à la circonférence décrite du point donné comme centre et avec un rayon égal à la distance de ce même second point au foyer. Chacune de ces tangentes pourra être regardée comme la directrice de la parabole; en prenant le milieu de la distance du foyer à la directrice on aura le sommet; etc.

117. Joindre le foyer donné F et le point I, où la tangente donnée TT′ rencontre la directrice DD′; mener FM, perpendiculaire à IF : le point M où cette perpendiculaire rencontre la tangente est le point de contact.

Ensuite menez FP perpendiculaire à la tangente, et prolongez-la de PG=PF, et joignez GM, ce qui déterminera le second foyer par la rencontre de GM et de FH, perpendiculaire à DD′.

118. Soit $\frac{m}{n}$ l'excentricité donnée : on aura, en désignant les demi-axes par A et B,

$$\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{A}=\frac{m}{n};$$

d'où

$$\frac{B}{A}=\pm\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{n},$$

ce qui déterminera la direction de l'axe transverse de l'hyperbole, et par conséquent le centre; etc.

124. En effet, soit AP (fig. 6) la perpendiculaire, et PM et PN les droites qui se coupent à son pied dans le plan; prenez PM=PM′, PN′=PN, et joignez MN, M′N′, qui rencontrent PO en O et O′.

Il est facile de voir que OP′=OP, O′M′=OM, O′N′=ON. Cela posé, si l'on joint un point quelconque A de la perpendiculaire AP avec les points M, N, M′, N′, on verra également sans peine que AM=AM′, AN=AN′; et comme M′N′=MN, l'angle AMO=AM′O′; et à cause de O′M′=OM on en conclut AO′=AO; et, de là, l'égalité des triangles APO, APO′, et des angles APO, APO′ : ce qui démontre le théorème.

127. Le lieu géométrique est une circonférence qui a pour centre le point donné et pour rayon la distance de ce point à la directrice.

Prenez le milieu de la partie de la tangente comprise entre les asymptotes; ce point appartient à la courbe.

Par ce point menez des parallèles aux bissectrices de l'angle des asymptotes et de son supplément, lesquelles bissectrices sont dirigées suivant les axes de l'hyperbole; enfin, cherchez une moyenne proportionnelle entre les segments interceptés sur chaque parallèle par les asymptotes : ces moyennes proportionnelles représentent les longueurs des demi axes, qu'on portera chacune sur la bissectrice parallèle à la sécante correspondante.

128. Soit

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

l'équation de la parabole.

$$\beta y = p(x + \alpha) \tag{2}$$

l'équation de la tangente en un point quelconque x, y,

et enfin

$$\beta = -\frac{y}{p}\alpha \tag{3}$$

l'équation de la perpendiculaire menée du sommet sur la tangente.

Eliminant x et y entre les équations (1), (2) et (3), on obtiendra l'équation finale du lieu géométrique demandé.

L'équation (3) donne

$$y = -\frac{p\beta}{\alpha},$$

et par conséquent l'équation (2),

$$x=-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}\right);$$

substituant ces deux valeurs dans l'équation (1), et réduisant, on trouve

$$\beta^2=-\frac{\alpha^3}{\alpha+\frac{p}{2}},$$

équation d'une cissoïde renversée, qui a pour pôle le sommet de la parabole, et pour diamètre du cercle générateur la distance du sommet à la directrice : la directrice est par conséquent asymptote à la courbe.

136. Prenant pour axe des abscisses la droite CA et pour axe des ordonnées une droite perpendiculaire à CA élevée par le centre C, d'après la construction on aura BD=DM. Or, à cause de la tangente DA et de la sécante DC, on a

$$\overline{DA}^2=DB(DB+2r)=DM(2r+DM),$$

en désignant par r le rayon du cercle.

Si donc on fait $CP=x$, $MP=DA=y$, d'où $DM=x-r$, on aura sur-le-champ

$$y^2=(x-r)[2r+(x-r)],$$

et, toute réduction faite,

$$y^2-x^2=-r^2,$$

équation d'une hyperbole équilatère dont l'axe transverse est égal au diamètre du centre donné.

On peut en conclure une construction très simple de l'hyperbole équilatère.

137. Du foyer F menez FP, FQ, perpendiculaires sur l'asymptote SS' et sur la tangente TT': le centre de la courbe devra se trouver sur la droite SS' et à égale distance des points P et Q, d'après les propriétés connues de l'hyperbole. On joindra donc PQ, et on élèvera sur le milieu M de PQ une perpendiculaire MC, qui déterminera, par sa rencontre avec SS', le centre de l'hyperbole demandée.

La même solution s'applique au problème suivant :

Etant donné le foyer d'une ellipse, deux tangentes et la direction de l'un ou de l'autre des deux axes, déterminer la courbe.

On trouvera facilement le centre, et les éléments de la courbe seront connus.

138. *Première manière.* — Prenant pour origine des axes rectangulaires l'extrémité A du diamètre perpendiculaire à la tangente, et pour axe des abscisses ce diamètre lui-même, si on le désigne par $2r$, on aura à exprimer la condition M'N=AM (fig. 8). Or, de ce que M'N=AM, on a évidemment AP=P'B, et par conséquent $AP'=AB-AP=2r-x$.

L'équation du cercle est

$$Y^2=2rX-X^2=2r(2r-X)-(2r-X)^2,$$

et celle de la sécante AMN,

$$Y=\frac{y}{x}(2r-X);$$

Carrant celle-ci, et retranchant de la précédente, on a, après réduction,

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}.$$

Deuxième manière. — 1° On obtient directemeni la même équation par la considération suivante:

Si l'on joint BM', on a, à cause de la similitude des triangles M'NB, AMP et NAB,

$$\frac{M'N}{MP}=\frac{NB}{AM},$$
$$\frac{NB}{AB}=\frac{MP}{AP};$$

multipliant terme à terme, et observant que $M'N=AM$, $MP=y$, $AP=x$, $AB=2r$:

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}.$$

La courbe a pour asymptote $x=2r$, c'est-à-dire la tangente elle-même, et un point multiple à l'origine, point de rebroussement de deuxième espèce.

L'équation polaire devient

$$\rho^2\sin^2\omega=\frac{\rho^3\cos^3\omega}{2r-\rho\cos\omega},$$

ou

$$2r\sin^2\omega=\rho\cos\omega;$$

d'où

$$\rho=2r\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{1-\sin^2\omega}},$$

ou

$$\rho=2r\operatorname{tang}\omega\sin\omega.$$

147. Prenant pour origine des axes rectangulaires le point fixe A (fig. 9), et pour axe des x une parallèle à la droite fixe HK, soit ANM une sécante quelconque, l'équation de condition sera, en désignant par l la longueur constante,

$$MN=l.$$

Or, MN=AM—AN; et, si l'on désigne par x, y, les coordonnées du point M, et par d la distance du point fixé à la droite HK, on aura

$$AM=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\frac{AN}{AM}=\frac{NQ}{MP}; \text{ d'où } AN=\frac{d.\sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Par conséquent l'équation du lieu géométrique sera

$$l=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{d}{y}\sqrt{x^2+y^2},$$

équation du 4e degré.

On en tire

$$(y-d)\sqrt{x^2+y^2}=ly,$$

et

$$\sqrt{x^2+y^2}=l\frac{y}{y-d};$$

d'où l'on voit que la courbe a pour asymptote la droite $y-d=0$, c'est-à-dire la ligne fixe HK; ce qui était évident d'après l'énoncé.

L'équation polaire est

$$\rho=\frac{l\rho\sin\omega}{\rho\sin\omega-d};$$

d'où

$$\rho=l+\frac{d}{\sin\omega}.$$

et généralement

$$\rho=\frac{d}{\sin\omega}\pm l,$$

à cause des deux branches de la courbe.

148. Soit l'équation générale de la parabole

$$(y+\frac{B}{2}x)^2+(Dy+Ex+F)=0.$$

On exprimera que la courbe est rapportée au foyer, en établissant les conditions pour que l'équation transformée par suite d'un changement convenable des coordonnées puisse être ramenée à la forme

$$y'^2=2p\left(x'+\frac{1}{2}p\right).$$

Substituant les formules de transformation

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

on obtiendra pour équations de condition

$$\sin\alpha+\frac{B}{2}\cos\alpha=0,$$
$$D\cos\alpha-E\sin\alpha=0,$$
$$\frac{D\sin\alpha+E\cos\alpha}{\left(\cos\alpha-\frac{B}{2}\sin\alpha\right)^2}=-2p,$$
$$\frac{F}{\left(\cos\alpha-\frac{B}{2}\sin\alpha\right)^2}=-p^2.$$

Eliminant α et p entre ces quatre équations, on trouvera

$$2D+BE=0,\quad FB^2+D^2=0;$$

d'où

$$E=-\frac{2D}{B},\quad F=-\frac{D^2}{B^2};$$

et l'équation de la parabole rapportée à deux axes rectan-

gulaires quelconques passant par son foyer sera

$$\left(y+\frac{B}{2}x\right)^2+D\left(y-\frac{2}{B}x\right)-\frac{D^2}{B^2}=0.$$

Cela posé, si l'on prend l'axe des y parallèle à la tangente commune, et par conséquent pour axe des x une perpendiculaire abaissée du foyer sur cette droite, représentée par l'équation

$$x=a,$$

on trouvera facilement pour coordonnées du point de contact

$$x_1=a, \qquad y_1=-\frac{BA+D}{2},$$

et pour condition de tangence

$$(Ba+D)^2-(B^4a^2-8BDa-4D^2)=0;$$

d'où l'on tire $D=-Ba$, et par suite

$$x_1=a, \qquad y_1=\frac{B}{2}a.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que la distance de ce point à la directrice est égale à la distance de ce même point à l'origine.

Pour cela, comme l'équation du diamètre de la parabole est

$$y=-\frac{B}{2}x-\frac{D}{2},$$

l'équation de l'axe, qui doit nécessairement passer par le foyer, sera

$$Y=-\frac{B}{2}X.$$

Et si l'on désigne par α, β, les coordonnées d'un sommet quelconque, on aura pour première relation

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{B}{2}. \qquad (1)$$

En outre la directrice, étant perpendiculaire à l'axe et devant passer par le point dont les coordonnées sont 2α, 2β, aura pour équation

$$y_1-2\beta=\frac{2}{B}(x-2\alpha),$$

La distance du point de contact trouvé ci-dessus à cette droite sera, d'après la formule connue,

$$\pm\frac{\frac{B}{2}a-2\beta-\frac{2}{B}(a-2\alpha)}{\sqrt{1+\frac{4}{B^2}}},$$

et celle de ce même point à l'origine,

$$a\sqrt{1+\frac{B^2}{4}}.$$

Egalant ces deux valeurs et réduisant, on trouvera, en prenant le signe supérieur,

$$\beta^2=-\frac{\alpha^3}{a+\alpha},$$

équation d'une cissoïde renversée;

En prenant le signe inférieur,

$$\alpha(\beta^2+\alpha^2-a\alpha)=0,$$

qui donne à la fois l'axe des ordonnées et un cercle construit sur la distance du foyer à la tangente comme diamètre : résultat qu'il était facile de prévoir, d'après la propriété connue de la parabole.

155 *et* 156. Soit x la hauteur du plan sécant au dessus de la base, et y le rayon de la section circulaire, on aura les équations

$$\left(\frac{\pi R^2 + \pi y^2}{2}\right) x + \frac{\pi x^3}{6} = \frac{\pi R^3}{3}, \qquad (1)$$

$$y^2 = R^2 - x^2, \qquad (2)$$

R étant le rayon de la sphère. Eliminant y entre ces équations, et faisant, pour abréger, $R=1$, on aura

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \qquad (F)$$

Cette équation a toutes ses racines réelles. En effet, appliquant la méthode de M. Sturm, on a

$$X = x^3 - 3x + 1, \qquad X' = 3x^2 - 3,$$
$$R_1 = 2x - 1, \qquad R_2 = 9;$$

et faisant successivement $x = +\infty$, $x = -\infty$, le nombre de variations gagnées étant égal à 3, l'équation proposée n'a que des racines réelles.

D'ailleurs, en faisant $x=0$, on gagne deux variations ; donc l'équation a deux racines positives.

Ces racines sont comprises entre 0 et 1 et entre 1 et 2 ; mais, d'après la nature de la question, x devant être essentiellement positif et <1, il suffira de chercher la racine comprise entre 0 et 1.

Substituant dans l'équation (F) $x=\frac{1}{y}$,

on obtient $$y^3-3y^2+1=0;$$

substituant dans celle-ci $y=2+\frac{1}{z}$, on trouve

$$3z^3-3z-1=0, \qquad z=1+\frac{1}{t};$$

$$t^3-6t^2-9t-3=0, \qquad t=7+\frac{1}{u};$$

$$17u^3-54u^2-15u-1=0, \qquad u=3+\frac{1}{v};$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

d'où enfin

$$x=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

et les réduites consécutives

$$x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{23},\ \frac{25}{72}\ldots,$$

ou en décimales $x=0{,}347\ \ldots$, à moins de 0,001 près.

157. L'origine des axes rectangulaires étant placée au centre O de la première, et l'axe des x dirigé suivant la ligne des centres OC, si l'on désigne par d la distance des centres, par α, β, les coordonnées d'un des points de rencontre des tangentes, et enfin par r et r' les rayons des circonférences données, dont les équations sont

$$q^2+p^2=r^2, \qquad (1)$$
$$y^2+(x-d)^2=r'^2. \qquad (2)$$

L'équation d'une tangente en un point quelconque T(p, q) de la première, sera

$$qy+px=r^2, \qquad (3)$$

y et x désignant les coordonnées d'un des points d'intersection de cette tangente avec la seconde circonférence.

En outre la corde de contact des deux tangentes menées à la seconde circonférence par le point I (α, β) sera

$$\beta y+(x-d)(\alpha-d)=r'^2. \qquad (4)$$

Or, les équations (3) et (4), représentant une seule même droite TMN, il faut et il suffit que les constantes des deux équations, résolues par rapport à y, soient identiquement les mêmes ; résolvant ces équations, on obtient

$$y=-\frac{p}{q}x+\frac{r^2}{q},$$

$$y=\frac{-(\alpha-d)}{\beta}x+\frac{r'^2+(\alpha-d)d}{\beta}.$$

Egalant les constantes, on aura

$$\frac{\alpha-d}{\beta}=\frac{p}{q}, \qquad (5)$$

$$\frac{r'^2+(\alpha-d)d}{\beta}=\frac{r^2}{q}. \qquad (6)$$

Si le point T (p, q) était déterminé sur la première circonférence, l'élimination directe entre les équations (5) et (6) ferait connaître les coordonnées α, β, du point de rencontre I correspondant à la tangente sécante TMN.

Mais si l'on élimine p et q entre les équations (1), (5) et (6), l'équation résultante en α, β, représentera le lieu géo-

métrique des points de rencontre des couples de tangentes menées à la seconde circonférence par les points d'intersection avec elle de toutes les droites tangentes à la première.

Les équations (5) et (6) donnent

$$p=\frac{r^2(\alpha-d)}{r'^2+(\alpha-d)d},\quad q=\frac{r^2\beta}{r'^2+(\alpha-d)d},$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouvera, toutesréductions faites,

$$r^2\beta^2+(\alpha-d)^2(r^2-d^2)-2dr'^2(\alpha-d)-r'^4=0, \qquad \text{(F)}$$

équation qui représente une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que r est plus grand, plus petit que d ou égal à d.

Si $d=0$, l'équation (F) se réduit à

$$\beta^2+\alpha^2=\frac{r'^4}{r^2},$$

et représente un cercle.

Si $d=r=r'$, elle devient

$$\beta^2-2r\left(\alpha-\frac{r}{2}\right)=0,$$

et représente une parabole ayant pour axe la ligne des centres et pour paramètre le diamètre de chacun des cercles donnés, le sommet étant situé au milieu du rayon.

158. Soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes ; α, β ; α', β', les coordonnées des deux points cherchés. La somme des distances de ces points à un point quelconque

x, y, de la courbe, sera exprimée par

$$S=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2};$$

développant, et substituant à la place de y sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse, on aura

$$S=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2+b^2-2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$+\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2+b^2-2\beta'\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Pour que cette somme soit constante, c'est-à-dire indépendante de la variable x, il faut 1° que les expressions des distances soient rationnelles, ce qui exige que $\beta=0$ et $\beta'=0$; 2° que les trinômes en x résultant de la substitution de ces valeurs soient des carrés parfaits; 3° enfin que les coefficients de x soient égaux et de signe contraire; ce qui fournit les conditions nouvelles

$$\alpha'=-\alpha,$$

et

$$4\alpha^2=4\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(\alpha^2+b^2).$$

La dernière relation donne, toute réduction faite,

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2};$$

les deux points cherchés se trouvent donc sur le grand axe de l'ellipse, à une distance du centre exprimée par la valeur précédente de α.

La somme revient à $S=2\sqrt{\alpha^2+b^2}=2\sqrt{a^2-b^2+b^2}=2a$ et est égale par conséquent au grand axe.

Cette définition des foyers est plus simple et plus analy-

tique que la définition généralement adoptée, et qui n'est pas complète : car la distance du foyer à un poiut quelconque de la courbe n'est une fonction rationnelle et linéaire de l'abcisse de ce point que lorsque l'ellipse est rapportée à ses axes.

162. Réduisant 23° 31′ 30″ en fraction ordinaire du degré, on aura

$$23^\circ\ 3'\ 30'' = \frac{84690^\circ}{3460},$$

et, comme la circonférence $2\pi = 360^\circ = 400^G$, on a

$$1^\circ = \frac{10^G}{9},$$

et par conséquent

$$\frac{84690^\circ}{3600} = \frac{84690}{3600} \times \frac{10^G}{9} = \frac{8469^G}{36.9} = \frac{941^G}{36}.$$

Effectuant la division pour extraire les entiers, et poussant l'approximation jusqu'aux secondes centésimales, on trouvera pour la valeur de l'arc donné, en grades,

$$26^G,1388.$$

qu'on énonce 26 grades 13 minutes 88 secondes.

166. Soit

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse ;

$$y = a(x - A), \qquad (2)$$

$$y = -\frac{B^2}{A^2a}(x + A), \qquad (3)$$

les équations de deux cordes supplémentaires qui s'appuient sur le grand axe.

Les équations des perpendiculaires abaissées des sommets sur ces cordes seront

$$y = -\frac{1}{a}(x+\text{A}), \qquad (4)$$

$$y = \frac{\text{A}^2 a}{\text{B}}(x-\text{A}). \qquad (5)$$

Eliminant a entre les équations (4) et (5), on trouvera, toute réduction faite,

$$\text{B}^2 y^2 + \text{A}^2 x^2 = \text{A}^4,$$

ou

$$\frac{y^2}{\left(\frac{\text{A}^4}{\text{B}^2}\right)} + \frac{x^2}{\text{A}^2} = 1,$$

équation d'un ellipse concentrique, dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites que la proposée, et égaux à 2A et à $\frac{2\text{A}^2}{\text{B}}$.

Le demi grand axe de la nouvelle ellipse, $\frac{\text{A}^2}{\text{B}}$, s'obtient facilement en menant la corde qui joint les extrémités des deux axes de l'ellipse proposée, et par l'autre extrémité du grand axe une perpendiculaire à cette corde. La distance du centre au point où cette perpendiculaire coupe le petit axe prolongé est précisément égale à $\frac{\text{A}^2}{\text{B}}$.

167. Soit

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (1)$$

l'équation générale des courbes du 2e degré, et

$$y - b = \alpha(x - a) \qquad (2)$$

l'équation d'une sécante quelconque menée par le point donné a, b.

Eliminant y entre les équations (1) et (2), on trouvera successivement

$$(\alpha(x-a)+b)^2=2px+qx^2,$$

$$x^2(\alpha^2+q)-2(a\alpha^2-b\alpha+p)x+\alpha^2a^2-2ab\alpha+b^2=0.$$

Or, si l'on désigne par x', x'', les abscisses des points d'intersection de la sécante et de la courbe, et par X et Y les coordonnées du point milieu de la corde, on aura

$$\frac{x'+x''}{2}=\text{X},$$

et, d'après la théorie des équations,

$$\frac{a\alpha^2-b\alpha+p}{\alpha^2+q}=\text{X}. \qquad (3)$$

En outre X, Y, devant satisfaire à l'équation (2), on aura la relation

$$\text{Y}-b=\alpha(\text{X}-a). \qquad (4)$$

Si l'on élimine α entre les équations (3) et (4), l'équation finale en X, Y, sera le lieu géométrique demandé. Tirant la valeur de α de l'équation (4) pour la substituer dans l'équation (3), et réduisant, on trouvera

$$(\text{Y}-b)^2+b(\text{Y}-b)=(p-q\text{X})(\text{X}-a),$$

équation d'une courbe du 2ᵉ degré, qui peut se mettre sous la forme

$$\left(\text{Y}+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}=(p-aq)(\text{X}-a)-q(\text{X}-a)^2.$$

168. Le rapport $\frac{\text{B}}{\text{A}}$ étant donné, la direction des axes

est déterminée. Par le point donné M menez des sécantes NMN′, MPP′, parallèles à ces directions : les points N′, P′, déterminés par les relations

$$\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{M'P'}=\mathrm{A}^2,\qquad \mathrm{MN}\,.\,\mathrm{M'N'}=\mathrm{B}^2,$$

appartiennent à la seconde asymptote; de là le centre, etc.

176. *Première solution.* — Soit

$$q^2+p^2=r^2, \tag{1}$$

$$q'^2+(p'-d)^2=r'^2, \tag{2}$$

les équations des deux cercles donnés, l'origine des axes rectangulaires étant placée au centre du premier, et l'axe des x passant par le centre du second.

Les équations des tangentes aux points p, q, du premier cercle, p', q', du second, seront

$$qy+px=r^2, \tag{3}$$

$$q'y+(p'-d)(x-d)=r'^2. \tag{4}$$

Et l'on exprimera, en égalant les constantes de ces deux équations, que ces deux tangentes ne font qu'une seule et même droite : ces équations de conditions sont

$$\frac{p}{q}=\frac{p'-d}{q'}, \tag{5}$$

$$\frac{r'}{q}=\frac{r'^2+d(p-d)}{q'}. \tag{6}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer p et q au moyen des équations (1), (2), (5) et (6), et à les substituer dans l'équation

(3), ou bien à déterminer p', q', au moyen des mêmes équations, et à les substituer dans l'équation (4).

L'équation (5) donne

$$q'=\frac{(p'-d)q}{p};$$

et par conséquent l'équation (6) devient, toute réduction faite,

$$p'-d=\frac{pr'^2}{r^2-pd}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), on obtient

$$r'^2q^2+p^2(r'^2-d^2)+2pr^2d-r^4=0.$$

Mais l'équation (1) donne

$$r'^2q^2+r'^2p^2=r^2r'^2;$$

d'où l'on tire par soustraction

$$(pd-r^2)^2=r^2r'^2,$$

et

$$p=\frac{r(r\pm r')}{d}.$$

Il suit

$$q^2=r^2-p^2=r^2-\frac{r^2(r\pm r')^2}{d^2}=\frac{r^2(d^2-(r\pm r')^2)}{d^2},$$

et enfin

$$q=\frac{\pm r\sqrt{d^2-(r\pm r')^2}}{d}.$$

L'équation de la tangente (3) donnera par conséquent

$$\pm\frac{r\sqrt{d^2-(r\pm r')^2}}{d}y+\frac{r(r\pm r')}{d}x=r^2,$$

ou

$$y = \mp \frac{r \pm r'}{\sqrt{d^2-(r\pm r')^2}} x \pm \frac{dr}{\sqrt{d^2-(r\pm r')^2}}. \qquad (F)$$

Si l'on fait $y=0$, on trouve $x=\frac{r}{r\pm r'}d$; ce qui détermine les deux centres de similitude.

Deuxième solution. — La droite (F) est parallèle au côté du triangle rectangle construit sur la distance des centres comme hypoténuse, et dont le 3e côté est $r\pm r'$.

177. 1° *Ellipse.* — Soit F, F' (fig. 10), les foyers de l'ellipse donnée, et M un des points d'intersection de l'ellipse et de la droite donnée RR', tel que FM+F'M=2A, grand axe de l'ellipse, d'après la propriété connue des foyers. Prolongez FM de MG=MF' : le point G sera sur une circonférence décrite du point F comme centre avec un rayon FG=2A, et de plus sur une circonférence décrite du point M (inconnu) avec un rayon (inconnu) MF'=MG.

La question revient donc à décrire un cercle assujetti à passer pour le point F', à être tangent au cercle dont le rayon =FG et dont le centre se trouve sur la droite RR'.

Or on satisfera à cette dernière condition si, menant F'P perpendiculaire à RR', et prenant PH=PF', on assujettit le cercle demandé à passer par les deux points F' et H.

Pour résoudre ce problème ainsi énoncé, il faut faire passer un cercle quelconque par les deux points H et F', et joindre les points d'intersection de ce cercle auxiliaire et du cercle FG par la droite KL, qui rencontre en I la droite FH, prolongée s'il est nécessaire. De ce point I mener les tangentes IT, IT', au cercle FG ; le cercle qui passera par les points F', H, T; F', H, T', sera tangent au cercle FG, et les centres M et M' seront les points demandés.

(Il est évident que le point T se confond avec le point G.)

On voit aussi qu'il suffit, après avoir mené les tangentes IT, IT′, de joindre F′T, F′T′, et d'élever par le milieu de ces droites des perpendiculaires, qui rencontreront la droite donnée RR′ aux points demandés M, M′.

2° *Hyperbole.* — Il suffira d'indiquer la construction du problème, d'après ce qui vient d'être démontré.

Soit RR′ la droite donnée, 2A l'axe transverse de l'hyperbole, dont les foyers sont en F et F′.

Du point F comme centre, et d'un rayon $=2A$, décrire une circonférence; déterminer comme précédemment le point H, symétrique à F′ par rapport à la droite RR′. Faire passer un cercle quelconque par H et F′; mener la corde de section KL, et prolonger la droite HF′, qui la coupe en I; enfin, mener les tangentes IT, IT′; joindre F′T, F′T′; par le milieu de ces droites élever les perpendiculaires mM, $m'M'$, qui déterminent par leur rencontre avec RR′ les points M, M′.

3° *Parabole.* — Soit F le foyer (fig. 11), DD′ la directrice de la parabole donnée; il s'agit de trouver sur RR′ un point M tel que $MF=MT$, perpendiculaire à DD′, c'est-à-dire de décrire un cercle qui ait son centre sur RR′, qui passe par F et soit tangent à DD′.

Chercher le point H, symétrique à F par rapport à RR′, et faire passer par les points F et H un cercle tangent à DD′.

Pour cela, prolonger FH jusqu'en I, prendre IK, moyenne proportionnelle à IH, IF, et porter IK en IT et IT′: les perpendiculaires TM, T′M′, sur DD′, détermineront les points demandés.

178. Soit O le centre de la courbe (fig. 12), M le point donné, OD le demi-diamètre donné, et OE′ la direction de son conjugué.

Mener MP parallèle à OE′; sur D*d*, comme diamètre, décrire un cercle; élever les perpendiculaires OI, PH, et prendre PN=PM.

Les ordonnées de l'ellipse et du cercle construits sur le même axe transverse étant dans le rapport des demi-axes, on aura $\frac{PN}{PH}=\frac{B}{A}$, B étant le demi-diamètre inconnu.

B sera donc une quatrième proportionnelle à PH, PN et OI.

Joindre IH, qui rencontre OD en K, et mener KME, qui rencontre OE′ en E : OE est le demi-diamètre demandé. En effet

$$\frac{PM}{OE}=\frac{KP}{KO}=\frac{PH}{OI}=\frac{PH}{A};$$

d'où

$$\frac{PN}{PH}=\frac{OE}{A}.$$

186. F et F′ étant les foyers, et M le point donné, la droite FF′ déterminera la direction du grand axe, dont la longueur sera FM+F′M. Le centre sera au milieu de FF′, et le demi petit axe sera facilement déterminé par la relation $B^2=A^2-c^2$; $c=\frac{1}{2}$ FF′.

Démontrer directement que la somme des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers d'une ellipse est constante et égale au grand axe.

187. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée au centre et à ses axes, et $x=0$, $y=y'$, les coordonnées d'un point pris sur l'axe des ordonnées : l'équation de la normale à l'ellipse menée par ce point sera

$$y-y'=\frac{A^2y}{B^2x}\,x. \qquad (2)$$

L'équation (1) donne

$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^3-x^2). \qquad (3)$$

Multipliant ces deux équations terme à terme, et réduisant, on obtiendra

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+x^2=A^2+\frac{1}{4}y'^2,$$

équation d'une circonférence dont le centre est au milieu de la distance du point donné au centre de l'ellipse, et le rayon, la distance de ce point milieu à l'extrémité du grand axe.

Avant toute réduction, on remarquera que les relations $x=0$, $y=0$, satisfont au problème et répondent aux axes de l'ellipse, ce qui est évident de soi-même.

194. Soient x, $x+1$, $x+2$, les trois côtés : on aura pour équation de condition

$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2;$$

d'où l'on tire successivement

$$x^2-2x-3=0,$$

et $x=3$, seule valeur admissible, car la seconde valeur est négative.

Les trois côtés sont donc

3, 4, 5.

En effet, $5^2=3^2+4^2$.

195. Soit A et B les points communs, F le foyer donné, F' le foyer inconnu, et $2a$ le grand axe variable de ces el-

lipses : on aura, d'après la propriété essentielle de la courbe,

$$FA+F'A=2a,$$

$$FB+F'B=2a;$$

d'où

$$(FA-FB)=F'B-F'A.$$

Par conséquent le point F' est tel que la différence de ses distances à deux points donnés A et B est égale à une longueur donnée FA—FB; le lieu géométrique des points F' est donc une hyperbole dont les points A et B sont les foyers, et l'axe transverse FA—FB.

L'intersection de deux hyperboles confocales déterminera le 2e foyer, quand on connaîtra un foyer et trois points.

196. Soit TT', RR' (fig. 13), les tangentes données, et F le foyer donné : du point F menez les perpendiculaires FP, FP', et prenez PG=FP, P'G'=FP'. Les distances du second foyer aux points G et G' seront égales au grand axe, et par conséquent égales entre elles : les seconds foyers se trouveront donc sur la perpendiculaire HH' élevée sur le milieu de la droite GG'.

L'intersection de deux droites déterminera le 2e foyer, quand on connaîtra un foyer et trois tangentes; la courbe sera donc facilement déterminée.

197. Soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes;

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2 \qquad (2)$$

celle d'une tangente au point x', y', de la courbe. Si l'on fait

successivement $x=0$, $y=0$, dans l'équation (2), on trouvera $y_0=\frac{b^2}{y'}$, $x_0=\frac{a^2}{x'}$, pour les coordonnées des points où la tangente rencontre les axes, et par conséquent le rectangle demandé sera exprimé par

$$R=\sqrt{\left(\frac{a^2}{x'}-x'\right)^2+y'^2}\times\sqrt{\left(\frac{b^2}{y'}-y'\right)^2+x'^2},$$

qui se met sous la forme

$$R=\frac{1}{x'y'}\sqrt{(a^2-x'^2)^2+y'^2x'^2}\times\sqrt{(b^2-y'^2)^2+y'^2x'^2};$$

et à cause des valeurs

$$(a^2-x'^2)^2=\frac{a^4y'^4}{b^4}, \qquad (b^2-y'^2)^2=\frac{b^4x'^4}{a^4},$$

tirées de l'équation de la courbe (1), on trouvera, toute réduction faite,

$$R=\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2}.$$

Soit

$$y=\alpha x \qquad (3)$$

l'équation d'un diamètre quelconque : une simple élimination entre les équations (1) et (3) donnera

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2(1+\alpha^2)}{a^2\alpha^2+b^2};$$

et si l'on veut exprimer que le diamètre (3) est le conjugué du diamètre qui passe par le point de contact, c'est-à-dire parallèle à la tangente, il suffira de remplacer α par $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

On trouvera, pour l'expression de ce demi-diamètre,

$$x^2+y^2=D'^2=\frac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2},$$

et par conséquent

$$R=D'^2.$$

C. Q. F. D.

Le calcul serait exactement le même pour l'hyperbole, et le résultat peut d'ailleurs se conclure du précédent en changeant b^2 en $-b^2$.

Si l'on substitue à $a^4y'^2$ sa valeur $a^4b^2-ay^2x'^2$ tirée de l'équation de la courbe, on obtient, après réductions faciles à découvrir,

$$D'^2=(a+\frac{c}{a}x')(a-\frac{cx'}{a});$$

d'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Dans toute courbe du 2e degré pourvue d'un centre, le demi-diamètre conjugué à celui qui passe par un point quelconque de la courbe est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs menés des foyers à ce point.

La propriété qui vient d'être démontrée n'est pas particulière aux axes de la courbe : elle s'applique à deux diamètres conjugués quelconques ; nous engageons le lecteur à en chercher la démonstration.

205. Soit x le plus petit des côtés inconnus ; $x+1$, $x+2$, $x+3$, représenteront les deux autres côtés et la surface du triangle : le demi-contour sera exprimé par $\frac{3(x+1)}{2}$.

D'après la formule connue de la surface du triangle en

fonction des côtés on devra avoir pour équation du problème

$$\sqrt{\frac{3(x+1)}{2}\cdot\frac{(x+3)}{2}\cdot\frac{(x+1)}{2}\cdot\frac{(x-1)}{2}}=x+3.$$

Elevant au carré, développant et réduisant, on trouvera l'équation finale

$$3x^3+3x^2-19x-51=0. \qquad (F)$$

Il est facile de voir que cette équation est satisfaite par $x=3$.

Les trois côtés du triangle sont donc représentés par les nombres 3, 4, 5, et la surface par le nombre 6.

On reconnaît facilement que le triangle est rectangle, puisque le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres. Les deux côtés de l'angle droit étant 3 et 4, on vérifie aisément que la surface est représentée par le nombre 6.

L'équation (F) n'admet que la racine réelle $x=3$. En effet, en divisant le premier membre par $x-3$ on obtient pour quotient

$$3x^2+12x+17=0,$$

équation dans laquelle $B^2-4AC<0$; par conséquent les racines du trinôme sont imaginaires.

206. Soient OD, OT (fig. 14), la directrice et la tangente données; par le point d'intersection O de ces deux droites menons OT′ perpendiculaire à OT. D'après une propriété connue de la directrice, les droites OT, OT′, sont deux tangentes à la parabole, puisque OT est tangente par hypothèse. Prenons ces droites pour axes des coordonnées, et soit $F(\alpha, \beta)$ le foyer d'une des paraboles qui répondent à l'énoncé. 1° Si de ce point F on mène FIG perpendiculaire à

OT, on aura FI=IG, ou plus généralement $FI=\frac{1}{2}GF$. Cette condition servira à déterminer le lieu géométrique des points F. D'après cette construction le lieu géométrique est évidemment une droite OF telle que TOF=TOD.

2° Si de ce même point F on abaisse FP, perpendiculaire sur la directrice OD, le point S, milieu de FP, sera le sommet de la parabole, qui a pour foyer le point F; cette condition déterminera le lieu géométrique des sommets S. On voit encore que le lieu géométrique des sommets est une droite, telle que OS, qui partage en deux parties égales les perpendiculaires abaissées de F sur OD.

Au reste l'analyse donne précisément le même résultat:

1° En effet, désignons par a la tangente de l'angle que la directrice OD fait avec l'axe des x, OT′; l'équation de OD sera de la forme

$$y=ax, \tag{1}$$

et la droite FIG, perpendiculaire à OT ou parallèle à OT′, aura pour équation

$$y=\beta, \tag{2}$$

de sorte que les coordonnées du point de rencontre G des droites (1) et (2) seront

$$y_1=\beta, \quad x_1=\frac{\beta}{a},$$

et la distance FG sera exprimée par

$$FG=\sqrt{\left(\alpha-\frac{\beta}{a}\right)^2}=\pm\left(\alpha-\frac{\beta}{a}\right);$$

or on a $FI=\alpha$, la première condition sera donc exprimée par

$$\alpha=\pm\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\beta}{a}\right);$$

d'où

$$\beta = a\alpha(1 \mp 2).$$

Le lieu géométrique des foyers est une ligne droite.

N. B. On a pris le cas le plus général des deux paraboles qui répondent à la même directrice et à la même tangente, l'une à droite, l'autre à gauche de la directrice.

En ne prenant que le cas de la parabole située à la droite de la directrice, on aura

$$\beta = -a\alpha. \tag{G}$$

2° La perpendiculaire FP, abaissée du point F $(\alpha\,\beta)$ sur la directrice OD$(y=ax)$, a pour équation

$$y-\beta = -\frac{1}{a}(x-\alpha);$$

d'où l'on tire pour les coordonnées du point P

$$x_2 = \frac{a\beta+\alpha}{1+a^2},$$

$$y_2 = a\left(\frac{a\beta+\alpha}{1+a^2}\right).$$

Et par conséquent, en désignant par x et y les coordonnées du point S, milieu de FP, on aura

$$x = \frac{\alpha+x_2}{2}, \quad y = \frac{\beta+y_2}{2},$$

ou

$$x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a\beta+\alpha}{1+a^2}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\beta + a\,\frac{a\beta+\alpha}{1+a^2}\right),$$

et à cause de la relation (G)

$$x = \frac{\alpha}{1+a^2}, \quad y = \frac{-a^3\alpha}{1+a^2};$$

d'où enfin

$$\frac{x}{y} = -a^3, \text{ et } y = -a^3x, \tag{G'}$$

équation d'une ligne droite.

3° Soit $y^2+mxy+nx^2+py+qx+r=0$ l'équation d'une courbe du 2e degré tangente aux droites. Si l'on fait $x=0$, on obtient

$$y^2+py+r=0;$$

et, en désignant par β l'ordonnée du point de contact, on devra avoir nécessairement

$$p=-2\beta, \qquad r=\beta^2.$$

Pour $y=0$ on trouvera de même

$$nx^2+qy+r=0, \text{ ou } n\left(x^2+\frac{q}{n}x+\frac{r}{n}\right)=0;$$

et, en désignant par α l'abscisse du point de contact, on devra avoir

$$\frac{q}{n}=-2\alpha, \qquad \frac{r}{n}=\alpha^2;$$

d'où l'on tire aisément

$$n=\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad q=-\frac{2\beta^2}{\alpha};$$

et par conséquent l'équation de la courbe sera

$$y^2+mxy+\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2-2\beta y-2\frac{\beta^2}{\alpha}x+\beta^2=0.$$

Si l'on veut exprimer que la courbe est une parabole, on aura la relation

$$m^2-4\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0; \text{ d'où } m=\pm2\frac{\beta}{\alpha},$$

et l'équation générale de la parabole sera

$$y^2-2\frac{\beta}{\alpha}xy+\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2-2\beta y-\frac{2\beta^2}{\alpha}x+\beta^2=0;$$

d'où l'on tire successivement en résolvant, par rapport à y,

$$y=\beta\left(\frac{x}{\alpha}+1\right)\pm2\beta\sqrt{\frac{x}{\alpha}},$$

$$\frac{y}{\beta}=\left(1-\sqrt{\frac{x}{\alpha}}\right)^2,$$

et enfin

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha}}=1,$$

équation générale de toutes les paraboles qui répondent à l'énoncé; les constantes β et α sont les coordonnées des points de tangence.

207. Soit O (fig. 15), le centre de l'ellipse, A et B les deux points donnés et TT′ la tangente; on mènera AO et BO, sur lesquelles on prendra OA′=OA, OB′=OB, et les points A′ et B′ appartiendront à la courbe. De plus le parallélogramme ABA′B′ sera inscrit dans l'ellipse, et les droites OX, OY, parallèles aux côtés du parallélogramme, formeront un système de diamètres conjugués.

L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ce système de diamètres conjugués sera, en désignant par x', y', les coordonnées du point de contact de la droite et de la courbe,

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2\;; \qquad (1)$$

et, si l'on fait $OT=a$, $OT'=b$, $OP=p$, $AP=q$, on aura les relations

$$A^2q^2+B^2p^2=A^2B^2, \qquad (2)$$

$$ax'=A^2, \qquad (3)$$

$$by'=B^2. \qquad (4)$$

Ces quatre équations détermineront A, B, x' et y'.

La courbe peut être une hyperbole.

208. Du foyer abaisser une perpendiculaire sur chacune des deux droites données; puis, par le milieu de la droite qui joint les pieds des deux perpendiculaires, élever une troisième perpendiculaire, qui coupera l'asymptote au centre de l'hyperbole, etc.

216. Soit TM et SN (fig. 16) les deux tangentes données, O le centre, A le point donné; on mènera, à égale distance du centre, les droites M'T', N'S', parallèles à TM, SN, et l'on obtiendra ainsi un parallélogramme IHKL circonscrit à l'ellipse: la question reviendra à décrire une ellipse tangente aux quatre côtés d'un parallélogramme et passant par un point donné.

Soit a et b les demi-diagonales du parallélogramme, 2A, 2B, les diamètres dirigés suivant ces diagonales, et, enfin, p et q, les coordonnées du point donné: les équations du problème seront

$$\frac{q^2}{B^2}+\frac{p^2}{A^2}=1, \qquad (1)$$

$$\frac{A^2}{a^2}+\frac{B^2}{b^2}=1; \qquad (2)$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{1}{2b}\left[\sqrt{b^2(a+p)^2-a^2q^2}+\sqrt{b^2(a-p)^2-a^2q^2}\right],$$

$$B=\frac{1}{2a}\left[\sqrt{a^2(b+q)^2-b^2p^2}+\sqrt{a^2(b-q)^2-b^2p^2}\right].$$

217. Soit DD', TT' (fig. 17), la directrice et la tangente données; M le point de contact; menez QMQ' perpendiculaire à DD', et faites l'angle TMF=T'MQ'; puis sur MF prenez MF=MQ : le point F sera le foyer; GF, perpendiculaire à DD', sera l'axe, et le point A, milieu de FG, le sommet de la parabole demandée.

218. *Première solution.* — Soit A (fig. 18) le sommet donné, IT la tangente commune; x, y, les coordonnées inconnues d'un foyer F, rapportées aux axes rectangulaires AX, AY, ce dernier étant parallèle à la tangente.

Si l'on suppose menée la droite FP, perpendiculaire à la tangente, les droites PA et AF seront perpendiculaires entre elles, d'après la propriété connue de la parabole. Cela posé, si l'on désigne par $(-a, 0)$ les coordonnées du point I, et par $(-a, y)$ les coordonnées du point P, la droite AF aura pour équation

$$y_1 = \frac{y}{x} x_1,$$

et la droite AP,

$$y_2 = -\frac{y}{a} x_2.$$

La condition de perpendicularité de ces droites donnera tout d'abord l'équation du lieu géométrique demandé; en effet, on a

$$1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{a} = 0;$$

d'où

$$y^2 = ax,$$

équation d'une parabole dont le paramètre est égal à a.

Deuxième solution. — On peut appliquer à ce problème une méthode plus générale, ainsi qu'il suit:

Soit

$$\left(y + \frac{B}{2} x\right)^2 + Dy + Ex = 0 \qquad (A)$$

l'équation générale d'une parabole, l'origine des axes rectangulaires étant en un point quelconque de la courbe.

Pour exprimer que ce point est le sommet de la parabole il faut et il suffit qu'en changeant convenablement les axes

rectangulaires, l'équation, transformée à l'aide des formules

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

puisse être ramenée à la forme

$$y'^2 = 2px'.$$

On obtient en effet,

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha - \frac{B}{2}\sin\alpha)^2 y'^2 + 2(\sin\alpha + \frac{B}{2}\cos\alpha)(\cos\alpha - \frac{B}{2}\sin\alpha)x'y' \\ + (\sin\alpha + \frac{B}{2}\sin\alpha)^2 x'^2 + (D\cos\alpha - E\sin\alpha)y' \\ + (D\sin\alpha + E\cos\alpha)x'\end{array}\right\} = 0.$$

et les équations de condition sont

$$\sin\alpha + \frac{B}{2}\cos\alpha + 0, \quad D\cos\alpha - E\sin\alpha = 0;$$

d'où

$$E = -\frac{2D}{B}.$$

Maintenant si l'on prend pour axe des x la perpendiculaire AX abaissée sur la tangente IT, l'axe des y sera parallèle à cette tangente; et, pour exprimer que IT est tangent à la parabole, il faut qu'en substituant $x = AI = -a$ dans l'équation (A), réduite à la forme suivante

$$(y + \frac{B}{2}x)^2 + D(y - \frac{B}{2}x) = 0,$$

qui exprime que l'origine des axes rectangulaires est au sommet de la parabole, on obtienne pour y deux valeurs égales. Effectuant la substitution, et résolvant par rapport à y, on trouve

$$y = \frac{Ba - D}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{B}}\sqrt{B(Ba - D)^2 - (B^3a + 8D)a},$$

et par conséquent

$$B(Ba-D)^2-B^3a^2-8aD=0\,;$$

d'où

$$D=\frac{2a(B^2+4)}{B}\,;$$

et les coordonnées du point de contact seront

$$x_1=-a\,,\qquad y_1=-\frac{(B^2+8)a}{2B}.$$

Cela posé, si x, y, représentent les coordonnées du foyer, en observant que l'équation du diamètre de la parabole est

$$Y=-\frac{BX-D}{2},$$

on trouvera facilement que l'équation de l'axe est

$$Y=-\frac{B}{2}X,$$

et par conséquent on aura pour première relation

$$y=-\frac{B}{2}x, \tag{1}$$

L'équation de la directrice passant par le point $-x$, $-y$, perpendiculairement à l'axe, sera

$$y_1+y=\frac{2}{B}(x_1+x).$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que les distances du point x_1, y_1, à la directrice et au foyer, sont égales, ce qui donne l'équation de condition

$$\frac{\left(y-\frac{(B^2+8)}{2B}a\right)-\frac{2}{B}(x-a)}{\sqrt{1+\frac{4}{B^2}}}=\sqrt{(a+x)^2+\left(y+\frac{(B^2+8)}{2B}a\right)^2}, \tag{2}$$

qui se réduit, à cause de l'équation (1), à

$$\frac{\left(y+\frac{y}{x}\right)a+\frac{x}{y}(a+x)}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}=\sqrt{(a+)^2+\left[y-\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)a\right]^2};$$

d'où, après une première réduction, on obtient

$$\frac{(a+x)\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{\sqrt{(a+x)^2x^2y^2+[xy^2-(y^2+2x^2)a]^2}}{xy};$$

ensuite

$$y^4(a+x^2)=[xy^2-(y^2+2x^2)a]^2,$$

$$y^2(a+x)=\pm[xy^2-(y^2+2x^2)a].$$

On ne peut admettre le signe $+$, qui donne pour résultat

$$(y^2+2x^2)a=0.$$

Mais en prenant le signe — on obtient

$$x(y^2-ax)=0,$$

équation résolue soit par $x=0$, parallèle à la tangente menée par le point A, sommet donné, soit par $y^2-ax=0$, résultat précédemment trouvé.

226. Soit O (fig. 19) le centre donné; MT, NS, RR′, les trois tangentes données : on mènera à égale distance du centre les droites M′T′, N′S′, parallèles à MT, NS; et le problème reviendra à inscrire dans un parallélogramme donné IHKL une ellipse tangente à une droite donnée RR′.

La courbe peut être une hyperbole.

227. Soit DD′ et TT′ (fig. 20), la directrice et la tangente communes données; au point de rencontre O de ces droites menons OX perpendiculaire à la directrice, et prenons OD′Y, OX, pour axes des coordonnées.

Soit α, β, les coordonnées du sommet A d'une des pa-

raboles qui répondent à l'énoncé, et $2p$ le paramètre de cette parabole. Si x', y', représentent les coordonnées du point de contact de cette parabole avec la tangente donnée TT', on aura

$$OG=AD=\alpha,\quad OD=AG=\beta,\quad OH=x',\quad MH=y',$$

et par suite

$$MP=(y'+\beta),\qquad AP=(x'-\alpha),$$

D'après les propriétés connues de la parabole on a

$$\overline{MP}^2=2p.AP,\ AT=AP,\ AF=AD,\ MF=MQ=DP;$$

d'où

$$TD=FP=DP-2AD=\frac{OD}{\tang OTD};$$

et si l'on désigne par a la tangente de l'angle MTP,

$$a=\frac{p}{MP},$$

et par conséquent, en vertu des notations précédentes, on aura les équations de condition

$$(y'+\beta)^2=2p(x'-\alpha), \qquad (1)$$

$$\frac{\beta}{a}=x'-2\alpha, \qquad (2)$$

$$\sqrt{(x'-2\alpha)^2+(y'+\beta)^2}=x', \qquad (3)$$

$$\frac{p}{y'+\beta}=a, \qquad (4)$$

entre lesquelles il ne restera plus qu'à éliminer x', y' et p.

Les équations (1) et (4) donnent

$$y'+\beta=2a(x'-\alpha),$$

et, à cause de l'équation (2), qui donne

$$x'-\alpha=\frac{\beta+a\alpha}{a}\quad \text{et}\quad x'=\frac{\beta+2a\alpha}{a},$$

on a

$$y'+\beta=2(\beta+a\alpha).$$

Substituant dans l'équation (4), on obtient, toute réduction faite,

$$(\beta+a\alpha)\,[a(\beta+a\alpha)-\alpha]=0,$$

équation qui se décompose en deux autres

$$\beta+a\alpha=0, \qquad \beta-\left(\frac{1-a^2}{a}\right)\alpha=0,$$

équations de deux dignes droites passant par le point d'intersection de la directrice et de la tangente données.

235. — 1° Soit un triangle rectiligne quelconque ABC (fig. 21).

Mener les hauteurs BP, CQ, qui se coupent en H; les droites des milieux BM, CN, qui se rencontrent en G, centre de gravité du triangle; et les perpendiculaires MO, NO, élevées par les points M et N sur les côtés AB et AC, lesquelles sont parallèles à BP, CQ, et se coupent au centre O du cercle circonscrit : à cause des parallèles BP et MO, CQ et NO, les triangles semblables CHI, NOK, donnent

$$\frac{HI}{KO}=\frac{CI}{NK}. \tag{1}$$

Si l'on joint MN, parallèle à BC, de même les triangles semblables MNK, CIB, donnent la proportion

$$\frac{CI}{NK}=\frac{BI}{MK}; \tag{2}$$

et, à cause des proportions (1) et (2),

$$\frac{HI}{KO}=\frac{BI}{MK}. \tag{3}$$

Les triangles semblables BIG, MGK, donnent aussi la relation

$$\frac{BI}{MK}=\frac{IG}{GK}. \tag{4}$$

La comparaison de ces deux dernières proportions donne

$$\frac{HI}{KO}=\frac{IG}{GK},$$

ou

$$\frac{IH}{IG}=\frac{KO}{KG}. \qquad (5)$$

Si donc l'on joint les points H et G, G et O, les deux triangles GIH, OKG, seront semblables, comme ayant un angle égal (HIG=GKO) compris entre côtés proportionnels; et par conséquent les angles IGK et OGK sont égaux, et les trois points H, G, O, sont en ligne droite.

2° Dès lors les triangles BGH, OGM, sont semblables et donnent la relation

$$\frac{OG}{GH}=\frac{MG}{GB}=\frac{1}{2}.$$

Remarquez que cette démonstration est indépendante de toute considération d'angle droit, et que par conséquent elle s'applique à deux droites quelconques menées des points B et C, les autres constructions restant les mêmes : ce qui donne lieu à un théorème plus général que le n° 1°.

256. *Première démonstration.* — Imaginez le grand cercle passant par ces deux points, et le cylindre circonscrit à la sphère touchant la sphère suivant ce grand cercle; si l'on conçoit le cylindre développé, l'arc de grand cercle qui passe par les deux points deviendra une ligne droite.

Deuxième démonstration. — Le développement de l'arc en fonction du sinus fournit une démonstration nouvelle du théorème précédent: en effet, on a

$$A=\sin A+\frac{3\sin^3 A}{1.2.3}+\frac{5\sin^5 A}{1.2.3.4.5}\ldots\ldots;$$

et, changeant A en $\frac{1}{2}$ A,

$$\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}A+\frac{3\sin^3\frac{1}{2}A}{1.2.3}+\frac{5\sin^5\frac{1}{2}A}{2.4.5}+\ldots\ldots;$$

d'où

$$A-2\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{3}\sin^3\frac{1}{2}A+\frac{3}{4.5}\sin^5\frac{1}{2}A+\ldots\ldots;$$

enfin, rétablissant l'homogénéité,

$$\left(A-2R\sin\frac{1}{2}A\right)=\frac{1}{3}\frac{\sin^3\frac{1}{2}A}{R^2}+\frac{3}{4.5}\frac{\sin^5\frac{1}{2}A}{R^4}+\ldots\ldots$$

Or, $2R\sin\frac{1}{2}A$ représentant la corde c qui soustend l'arc, on aura une expression de la forme

$$A-c=m\frac{c^3}{R^3}+n\frac{c^5}{R^4}+\ldots\ldots$$

Pour un autre arc A' de rayon r et soustendu par la même corde, on aura pareillement

$$A'-c=m\frac{c^3}{r^3}+n\frac{c^5}{r^4}+\ldots\ldots$$

et comme $R>r$, on aura $A-c<A'-c$; d'où $A'>A$.

257. Soit F, S et M, les points donnés (fig. 22.)
Joignez SF, qui déterminera la direction du grand axe. Soit XD la directrice inconnue, on aura

$$\frac{SF}{SX}=\frac{FM}{MD}=\frac{FM}{PX}=\frac{FM}{PS+SX};$$

d'où l'on conclura

$$SX=\frac{SF.SP}{FM-SF}.$$

Pour construire cette valeur, faites $SK^2=SF.SP$; portez FM en FG; sur SG décrivez une demi-circonférence, et portez SK en SH, ensuite menez HX perpendiculaire à SG.

Pour trouver l'autre sommet, sur FX décrivez une demi-circonférence, menez ST perpendiculaire à FX, et par le point T, la tangente TS', qui déterminera le second sommet S' par sa rencontre avec SF.

238. Soit la ligne droite fixe APX (fig. 23) prise pour axe des x, et pour axe des y la droite correspondante à la position qu'occupe le point donné M lorsque ce point et le centre du cercle mobile sont sur une même droite perpendiculaire à la droite fixe.

Lorsque le cercle mobile sera parvenu en A′ par exemple, d'après l'énoncé de la question on devra avoir

$$AA' = \text{arc } A'a\,;$$

de plus la droite ACM aura pris la position *acm*. Soit donc $AP = x$, $mP = y$, arc $aA' = AA' = z$, $AC = r$, $CM = d$. Si l'arc $aA' = z$, l'angle acA' sera égal à $\frac{z}{r}$, et l'on aura

$$AP = AA' + A'P = \text{arc } aA' + Rm,$$
$$x = Rm + \text{arc } aA'.$$

De même

$$mP = A'R = A'c - cR, \text{ ou } y = r - cR.$$

Or $mR = cm \sin mcR = cm \sin (200^{\circ} - acA') = d \sin \frac{z}{r}$,

$$cR = cm \cos mcR = cm \cos (200^{\circ} - acA') = -d \cos \frac{r}{z}\,;$$

donc $x = d \sin \left(\frac{z}{r}\right) + r \text{ arc}\left(\text{dont le sinus} = \frac{z}{r}\right)$, (1)

$$y = r - d \cos \frac{z}{r}. \qquad (2)$$

De la 2ᵉ équation on tire

$$\cos \frac{z}{r} = \frac{y-r}{d},$$

$$\sin \frac{z}{r} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{z}{r}} = \sqrt{\frac{d^2 - (y-r)^2}{d}}\,;$$

or $z = \text{arc } aA' = r(\text{arc dont l'angle} = \frac{z}{r})$ ou $r\,[\text{arc}(\frac{z}{r})]$ dans

a circonférence dont le rayon $=1$, et par conséquent

$$x=\sqrt{d^2-(y-r)^2}+r\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\sqrt{d^2-(y-r)^2}}{d}\right),$$

équation du lieu géométrique demandé.

Si $d=r$, l'équation, réduite à la forme

$$x=\sqrt{2ry-y^2}+r\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{d}\right),$$

représente la cycloïde ordinaire dans la position adoptée dans les problèmes de mécanique.

On peut établir différentes hypothèses pour la valeur de d.

Si $d=-r$, on a l'équation de la cycloïde, l'origine des axes étant à l'un des points de rebroussement, c'est-à-dire à l'origine du mouvement.

245. Soit F, D′D et M, le foyer, la directrice et le point donnés : abaissez FP et MQ perpendiculaires sur la directrice, et joignez MF ; prenez sur la ligne indéfinie FP les deux points A et A′ tels que $\frac{AF}{AP}=\frac{A'F}{A'P}=\frac{MF}{MQ}$: les points A et A′ seront les sommets ; le point O, milieu de AA′, sera le centre, OA le demi-grand axe, et la courbe sera déterminée.

L'élève démontrera l'exactitude de cette construction.

246. Soit $$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2 \qquad (1)$$

l'équation d'une tangente à l'ellipse dont l'équation rapportée à son centre et à ses axes est

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2. \qquad (2)$$

Soit

$$y=\alpha x, \qquad (3)$$

$$y=\alpha' x, \qquad (4)$$

les équations de deux diamètres quelconques.

Si l'on désigne, pour fixer les idées, par x_1, y_1; x_2, y_2, les coordonnées des points d'intersection de ces diamètres avec la tangente, on trouvera sans peine

$$x_1 = \frac{a^2b^2}{a^2\alpha y' + b^2x'}, \qquad y_1 = \frac{a^2b^2\alpha}{a^2\alpha y' + b^2x};$$

$$x_2 = \frac{a^2b^2}{a^2\alpha' y' + b^2x'}, \qquad y_2 = \frac{a^2b^2\alpha'}{a^2\alpha' y' + b^2x'};$$

d'où l'on tirera pour l'expression des segments

$$\sqrt{(x'-x_1)^2 + (y'-y_1)^2} = \frac{\alpha x' - y'}{a^2\alpha y' + b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2} = \text{S},$$

$$\sqrt{(x'-x_2)^2 + (y'-y_2)^2} = \frac{\alpha' x' - y'}{a^2\alpha' y' + b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2} = \text{S}'.$$

Si les diamètres sont conjugués, on aura la relation

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}; \tag{D}$$

substituant dans l'expression de S' la valeur de α' tirée de la relation (D), et réduisant, on obtient, abstraction faite du signe,

$$\text{S}' = \frac{a^2\alpha y' + b^2x'}{a^2b^2(\alpha x' - y')}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2};$$

d'où enfin

$$\text{SS}' = \frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^2b^2},$$

résultat indépendant de α.

La longueur du demi-diamètre dont l'équation est $y = \alpha' x$ est exprimée par

$$\text{D}'^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2(1+\alpha'^2)}{a^2\alpha'^2 + b^2}.$$

Si $\alpha' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$, c'est-à-dire si le diamètre est parallèle à

la tangente, ou, autrement dit, conjugué à celui qui passe par le point de contact, on aura

$$D'^2 = \frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^2b^2}.$$

Ce qui démontre le théorème.

D'ailleurs on a aussi, à cause de $a^4y'^2 = a^4b^2 - a^2b^2x'^2$,

$$D'^2 = \frac{a^4b^2 - a^2b^2x'^2 + b^4x'^2}{a^2b^2} = \frac{a^4 - c^2x'^2}{a^2} = \left(\frac{a^2 + cx}{a}\right)\left(\frac{a^2 - c'x}{a}\right)$$

$$= \left(a + \frac{cx'}{a}\right)\left(a - \frac{cx'}{a}\right) = rr',$$

en désignant par r, r', les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact; donc enfin

$$SS' = D'^2 = rr',$$

Cette propriété se démontre de la même manière pour l'hyperbole.

Elle sert à déterminer graphiquement les axes quand on connaît un système de diamètres conjugués de grandeur et de position.

255. Soit x le côté cherché; le volume du tétraèdre régulier en fonction du côté est

$$V = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}.$$

Or un gramme d'argent vaut $\frac{1}{4}$ fr.; et, la densité de l'argent étant représentée par 19, le poids du tétraèdre sera exprimé par

$$\frac{19.x^3\sqrt{2}}{12},$$

et son prix par

$$\frac{19.x^3\sqrt{2}}{12.4}.$$

On aura donc, pour déterminer x, la relation

$$\frac{19.x^3\sqrt{2}}{48}=p;$$

d'où

$$x=\sqrt[3]{\frac{48p}{19\sqrt{2}}},$$

x étant exprimé en centimètres.

256. Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes; $A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2$ l'équation de la tangente au point x', y', de la courbe, pour lequel on a la relation

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2. \tag{1}$$

Si l'on fait successivement $x=0$, $y=0$, dans l'équation de la tangente, on trouve

$$y_0=\frac{B^2}{y'}, \qquad x_0=\frac{A^2}{x'};$$

et, en désignant par l la longueur donnée, on aura, d'après l'énoncé, $x_0^2+y_0^2=l^2$, et par conséquent

$$\frac{A^4}{x'^2}+\frac{B^4}{y'^2}=l^2. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) serviront à déterminer les coordonnées du point de tangence cherché.

L'équation (2) donne

$$y'^2(A^4-l^2x'^2)+B^4x'^2=0;$$

et, substituant dans cette équation la valeur de y'^2, tirée de l'équation (1), on obtiendra

$$\frac{B^2}{A^2}(A^2-x'^2)(A^4-l^2x'^2)+B^4x'^2=0,$$

et, toute réduction faite,

$$l^2x'^4-A^2(A^2+l^2-B^2)x'^2+A^6=0;$$

d'où

$$x' = \pm A\sqrt{\frac{A^2+l^2-B^2}{2l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2+l^2-B^2}{2l^2}\right)^2 - \frac{A^6}{l^2}}}.$$

Cette expression étant de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ et la relation $a^2-b=k^2$ étant satisfaisante, on en tire facilement

$$x' = \pm\frac{A}{2l}[\sqrt{(l+A)^2-B^2} \pm \sqrt{(l-A)^2-B^2}]. \qquad (M)$$

En répétant les mêmes calculs d'élimination pour trouver la valeur de y, on obtient

$$y' = \pm\frac{B}{2l}[\sqrt{(l+B)^2-A^2} \pm \sqrt{(l-B)^2-A^2}]. \qquad (N)$$

Des valeurs (M) et (N) on conclut que la valeur de l doit être plus grande que A+B, ou tout au plus égale à cette somme ; ce qu'on pouvait prévoir, d'après le procédé connu de construction de l'ellipse, au moyen d'une droite de longueur constante A+B, mobile dans chacun des quatre angles formés par les axes perpendiculaires.

On pourra construire la valeur de x de la manière suivante :

Sur le grand axe prendre $OL=l$ (fig. 24), et décrire sur A'L et AL deux demi-circonférences ; porter OB=A'B' en A'b', AB''=OB en Ab'', et joindre Lb', Lb'' ; enfin, porter Lb'' en LD et LD' ; et b'D' et b'D seront égales à la somme ou à la différence des radicaux.

Par le point O mener Opd parallèle à b'D, et achever le parallélogramme D$b'od$; joindre Ld, et mener Ax parallèle à Dd ; prendre le milieu de Ox, et porter op en OP : le point P correspond à l'une des abscisses demandées.

Pour la somme des radicaux on effectuera la construction analogue à la précédente.

257. Soit

$$A^2q^2 + B^2p^2 = A^2B^2, \qquad (1)$$

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2, \qquad (2)$$

les équations des courbes données. La tangente en un point p, q, de la première passant par un point x, y, de la seconde, aura pour équation

$$A^2qy+B^2px=A^2B^2\,;$$

et si α, β, sont les coordonnées d'un des points de rencontre des tangentes menées par les points x, y; x' y', intersection de la première tangente avec la 2ᵉ courbe, l'équation de la corde de contact sera

$$A^2\beta y-B^2\alpha x=-A^2B^2.$$

Résolvant ces équations par rapport à y, et égalant les constantes, pour exprimer que ces deux droites ne font qu'une seule et même droite, on aura

$$-\frac{B^2p}{A^2q}=\frac{B^2\alpha}{A^2\beta}, \qquad (3)$$

$$\frac{B^2}{q}=-\frac{B^2}{\beta} \qquad (4)$$

Eliminant p et q entre les équations (1), (3) et (4), on obtient facilement

$$A^2\beta^2+p^2\alpha^2=A^2B^2.$$

Le lieu géométrique est donc l'ellipse elle-même.

On remarquera que le point de rencontre des deux tangentes à la seconde courbe est le point symétrique par rapport à l'axe du point de contact sur la première : en effet, on trouve par l'élimination entre les équations (3) et (4)

$$p=\alpha\,, \qquad q=-\beta.$$

258. *Première solution.* — Du point donné M (fig. 25) abaisser la perpendiculaire MO sur la directrice donnée DD', et prendre pour axes les droites OMX, ODY.

Soit $MO=h$; α, β, les coordonnées du sommet A d'une

des paraboles qui satisfont à l'énoncé du problème; menez AD parallèle à MO, et prenez AF=AD : le point F sera le foyer, et, d'après la propriété de la parabole, on aura

$$MF = MO = h.$$

Or $$MF = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{FP}^2} = \sqrt{\beta^2 + (2\alpha - h)^2}\,;$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$\sqrt{\beta^2 + (2\alpha - h)^2} = h,$$

et, toute réduction faite,

$$\beta^2 = 4\alpha(h - \alpha),$$

équation de l'ellipse inscrite dans le rectangle RSTV, dont les côtés sont h et $2h$, et qui touche les côtés en leur milieu.

Deuxième solution. — On obtient le même résultat en observant que, DF étant égal au demi-paramètre, on a, d'après une autre propriété de la parabole,

$$\overline{MP}^2 = 2DF.AP = 2DF(DP - AD),$$

et par conséquent

$$\beta^2 = 4\alpha(h - \alpha).$$

266. Soit A, B, C, les points donnés O; le centre de l'ellipse : on mènera AOA', BOB', sur lesquelles on prendra OA'=OA, OB'=OB; et le problème reviendra à circonscrire à un parallélogramme donné ABA'B' une ellipse assujettie à passer par un point donné.

La courbe peut être une hyperbole.

267. Soit

$$y = \alpha x \qquad (1)$$

l'équation d'un diamètre à l'ellipse rapportée à son centre

et à ses axes dont l'équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2; \qquad (2)$$

et

$$y=\alpha'(x-c) \qquad (3)$$

l'équation d'une corde quelconque menée par le foyer positif. Les coordonnées du point d'intersection des droites (1) et (3), seront

$$x=\frac{c\alpha'}{\alpha'-\alpha}, \quad y=\frac{c\alpha\alpha'}{\alpha'-\alpha}.$$

Or si ces droites sont conjuguées on aura la relation

$$\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2};$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{b^2c}{a^2\alpha^2+b^2}, \qquad y=\frac{b^2c\alpha}{a^2\alpha^2+b^2}.$$

Eliminant α entre ces deux équations, on trouvera, toute réduction faite,

$$a^2y^2+b^2x^2=b^2cx,$$

équation du lieu géométrique cherché.

Cette équation, qui représente évidemment une ellipse, peut se mettre sous la forme

$$\frac{y^2}{\frac{b^2c^2}{a^2.4}}+\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c^2}{4}}=1,$$

et l'on peut reconnaître qu'elle est semblable à l'ellipse proposée.

Le coefficient de similitude des deux courbes est $\frac{a}{\left(\frac{c}{2}\right)}$.

274. — 1° Sur BC, base donnée (fig. 26), prolongée indéfiniment, prendre les points I et I' tels que $\frac{BI}{IC}=\frac{m}{n}$, $\frac{BI'}{I'C}=\frac{m}{n}$, rapport donné.

La circonférence décrite sur II' comme diamètre sera un lieu géométrique des sommets du triangle demandé.

Du point I, comme centre, et d'un rayon égal à IA, bissectrice donnée, décrire une circonférence, qui sera un second lieu géométrique des sommets A.

Les points de rencontre A de ces deux circonférence, seront les sommets des deux triangles qui satisfont à l'énoncé.

2° Soit ABC le triangle cherché, dans lequel

$$BC=b, \quad AI=l, \quad \frac{AB}{AC}=\frac{BI}{IC}=\frac{m}{n}.$$

Décrire la circonférence circonscrite, prolonger la bissectrice AI jusqu'en D, et joindre DC; les deux triangles ABI et ADC sont semblables (ABI=ADC; BAI=DAC), et donnent la proportion

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AI}{AC};$$

d'où

$$AB.AC=AI.AD=AI(AI+ID)=\overline{AI}^2+AI.ID=\overline{AI}^2+BI.IC;$$

donc $$AB.AC=\overline{AI}^2+BI.IC.$$

Or, on a

$$\frac{BI}{IC}=\frac{m}{n}, \quad \text{et } BI+IC=b;$$

d'où l'on conclut

$$BI=\frac{m}{m+n}b, \qquad IC=\frac{n}{m+n}b;$$

et par conséquent

$$AB.AC=l^2+\frac{mn}{(m+n)^2}b^2.$$

Mais on a aussi la relation

$$\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n},$$

et par conséquent enfin

$$AB=\sqrt{\frac{m}{n}\left[l^2+\frac{mn}{(m+n)^2}b^2\right]},$$

$$AC=\sqrt{\frac{n}{m}\left[l^2+\frac{mn}{(m+n)^2}b^2\right]},$$

que l'on calculera sans difficulté.

276. *Première construction.* — Par le foyer donné F (fig. 27) abaisser une perpendiculaire FD sur l'asymptote donnée SS', prolonger FD de DE=FD, et par le point E mener EG parallèle à SS' : le second foyer F' sera sur cette parallèle.

Soit, en supposant le problème résolu, F' le deuxième foyer cherché ; si l'on joint FF', O sera le centre, OD le demi-axe transverse A et F'E=2A ; de sorte que, si l'on joint FM et F'M', on aura, d'après la propriété de l'hyperbole, F'M—FM=2A=F'E : donc si l'on prend F'G=F'M, on aura F'G—FM=2A ; et comme F'G—EG=F'E=2A, il s'ensuit que EG=FM. Il suffira donc de prendre, sur EG, EG=FM, de joindre GM, et par le point I, milieu de GM, d'élever perpendiculairement à GM une droite IF' qui, par son intersection avec EG, déterminera le second foyer F'. De là tous les éléments de la courbe.

Deuxième construction. — Par le point F mener la perpendiculaire FD sur l'asymptote ; D est un point de la directrice ; mener perallèlement à l'asymptote SS' les droites MT, G'FT', et diviser l'angle MFG' en deux parties égales par la droite FD', qui rencontre la droite MT en un second point D' de la directrice. Cette directrice DD' étant connue, on mènera FPO perpendiculaire à DD', et le centre O sera déterminé ; etc.

277. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes,

$$y=a(x-c)$$

l'équation d'une sécante quelconque menée par le foyer positif. Eliminant entre ces équations, afin de déterminer les points de rencontre de la sécante et de la courbe, on obtiendra successivement

$$A^2a^2(x-c)^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

$$(A^2a^2+B^2)x^2-2A^2a^2c^2x=A^2(B^2-a^2c^2);$$

d'où

$$x=\frac{A^2a^2c\pm AB\sqrt{a^2(A^2c^2)+B^2}}{A^2a^2+B^2};$$

et, à cause de $c^2=A^2-B^2$,

$$x=\frac{A^2a^2c\pm AB^2\sqrt{1+a^2}}{A^2a^2+B^2};$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$y=a\left[\frac{-B^2c^2\pm AB^2\sqrt{1+a^2}}{A^2a^2+B^2}\right].$$

Si l'on désigne par x_1, x_2; y_1, y_2, les valeurs des coordonnées des points d'intersection, comprises dans chacune des doubles valeurs précédentes, et par $2m$ la longueur de la corde donnée, telle que

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4m^2,$$

on trouvera, à cause de

$$x_1-x_2=\frac{2AB^2\sqrt{1+a^2}}{A^2a^2+B^2},$$

$$y_1-y_2=\frac{2AB^2a\sqrt{1+a^2}}{A^2a^2+B^2},$$

l'équation finale cherchée

$$\frac{2AB^2(1+a^2)}{A^2a^2+B^2}=2m,$$

qui déterminera l'inconnue a du problème.

On trouve en effet, par un calcul facile,

$$a=\pm\sqrt{\frac{m-A}{A-m\frac{A^2}{B^2}}}.$$

Si $m=A$, on trouve $a=0$; en effet, dans ce cas la sécante se confond avec le grand axe.

Si $m=\frac{B^2}{A}$, on obtient $a=\infty$; et, en effet, l'ordonnée du foyer est égale au demi-paramètre.

Si $m=B$, il vient $a=\pm\sqrt{\frac{B}{A}}$.

Au lieu de la tangente de l'angle que la sécante doit faire avec le grand axe, on pourra déterminer le sinus à l'aide de la relation

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}};$$

et l'on obtiendra, toute réduction faite,

$$\sin\alpha=\pm\frac{A}{c}\sqrt{\frac{A-m}{m}}.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$c\sin\alpha=\pm\frac{A}{m}\sqrt{m(A-m)},$$

et se construira sans difficulté.

279. Soit DD' la directrice donnée, ST la tangente, M le point : le foyer se trouvera sur une circonférence décrite du point donné M comme centre avec un rayon égal à la distance MQ de ce point à la directrice. Soit I le point de rencontre de la tangente et de la directrice : ce point sera à égale distance du foyer et du point où la parallèle à l'axe menée par le point de contact devrait rencontrer la directrice; donc la droite IF est inclinée sur la tangente de la même manière que celle-ci sur la directrice; donc le foyer sera facilement déterminé.

Deux solutions.

284. Soit AB (fig. 28) la base donnée, RR′ la droite donnée, $2l$ la somme donnée; par le point O, milieu de AB, prenez $OI = OH = l$: le sommet du triangle devra se trouver à la fois sur la droite donnée RR′ et sur l'ellipse dont IH est le grand axe et A et B les foyers.

En supposant le problème résolu, soit C le sommet cherché.

Si, après avoir décrit sur IH comme diamètre une demi-circonférence, et élevé par le point A une perpendiculaire AM qui la rencontre en M, on mène à cette circonférence la tangente MT, le point de rencontre E de MT et de IH, prolongées s'il est nécessaire, sera un point de la directrice DD′, laquelle sera déterminée de position.

Cela posé, si l'on abaisse CP, perpendiculaire sur la directrice, on aura, d'après la propriété connue de l'ellipse,

$$\frac{CP}{CA} = \frac{IE}{IA},$$

et, à cause des parallèles EI, CP,

$$\frac{CP}{CD} = \frac{EF}{DF};$$

d'où l'on tire, en divisant ces deux égalités,

$$\frac{CD}{CA} = \frac{IE.DF}{IA.EF}.$$

Le point C est donc tel que le rapport de ses distances à deux points donnés D et A est égal à un rapport déterminé.

Pour déterminer plus simplement ce rapport, on le mettra sous la forme

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DF}{IA\frac{EF}{CE}}.$$

Par le point A élevant la perpendiculaire IG; on a

$$\frac{EF}{IF} = \frac{DF}{FG}; \quad \text{d'où} \ \frac{EF}{IF+EF} = \frac{DF}{DF+FG}, \quad \text{ou} \ \frac{EF}{IE} = \frac{DF}{DG},$$

et par conséquent le rapport précédent devient

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DF}{IA\frac{DF}{DG}},$$

et enfin, simplifiant,

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DG}{IA}.$$

De là cette construction :

Mener IL parallèle à RR', et prendre IL=IA, puis mener LK parallèle à IG : on aura GK=IL=IA. Mener KA et GN parallèles à KA ; porter GK en GK'; mener K'N et GN' parallèles à K'A ; sur NN', comme diamètre, décrire une circonférence, qui déterminera, par ses intersections avec RR' les sommets C et C', qui répondent à la question.

286. Prenant pour axes les droites données OX, OY, faisant entre elles un angle θ, soit M un des centres des cercles qui coupent la première droite sous une corde égale à $2m$, la seconde sous une corde égale à $2n$. Si l'on désigne par x et y les coordonnées du point M, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les axes OX, OY, auront pour expression $y\sin\theta$, $x\sin\theta$; et, en désignant par ρ le rayon du cercle, on aura les relations

$$\rho^2=y^2\sin^2\theta+m^2, \qquad \rho^2=x^2\sin^2\theta+n^2;$$

et, par suite,

$$y^2-x^2=-\frac{(m^2-n^2)}{\sin^2\theta},$$

équation du lieu géométrique demandé. Ce lieu géométrique est donc généralement une hyperbole équilatère dont les asymptotes divisent en deux parties l'angle des droites données.

Si l'on fait $y=0$, on trouve $x=\pm\sqrt{\frac{m^2-n^2}{\sin^2\theta}}$, ce qui détermine un point de la courbe.

Connaissant les asymptotes et un point de l'hyperbole, la courbe sera complétement déterminée.

Partageant l'angle des asymptotes en deux parties égales, on aura la direction des axes ; et l'on construira facilement leur longueur, en menant par le point connu de la courbe une sécante parallèle à l'une ou l'autre de ces deux directions, et cherchant une moyenne proportionnelle entre les distances du point connu de la courbe aux deux points où cette sécante rencontre les asymptotes.

Au surplus on peut facilement déterminer un point du lieu géométrique cherché en prenant sur les droites données, à partir de leur point de concours, des longueurs égales à $2m$, et $2n$, et construisant le cercle qui passe par le point de concours des droites et les extrémités des cordes $2m$, $2n$.

Si l'angle $\theta = 100^{\circ}$, l'hyperbole est rapportée à ses axes principaux.

Si $m = n$, le lieu géométrique est l'une ou l'autre des bissectrices de l'angle des droites données.

287. On sait que deux courbes du 2e degré concentriques se coupent en quatre points qui sont les sommets d'un parallélogramme inscrit à la fois dans les deux courbes ; et par conséquent, les droites menées par le centre parallèlement aux côtés du parallélogramme forment un système de diamètres conjugués pour chacune des deux courbes.

Soit donc

$$Aq^2 + Cp^2 = 1, \quad (1)$$

$$A'y^2 + C'x^2 = 1. \quad (2)$$

les équations des deux courbes rapportées à ce système de diamètres conjugués.

L'équation de la tangente en un point p, q, de la courbe (1), et passant par un point x, y, de la seconde, sera

$$Aqy + Cpx = 1. \quad (3)$$

Or si l'on désigne par α, β, les coordonnées du point de rencontre des tangentes menées à la seconde courbe par deux points dont l'un a pour coordonnées x, y, l'équation de la corde de contact sera

$$A'\beta y + C'\alpha x = 1. \qquad (4)$$

Ces deux équations devant s'accorder entre elles, puisqu'elles représentent une seule et même droite, il faut que l'on ait

$$Aq = A'\beta, \qquad (5)$$

$$Cp = C'\alpha. \qquad (6)$$

On aura donc à éliminer p et q entre les équations (1), (5) et (6).

Des équations (5) et (6) on tire

$$q = \frac{A'}{A}\beta,$$

$$p = \frac{C'}{C}\alpha;$$

substituant dans (1),

$$A\frac{A'^2}{A^2}\beta^2 + C\frac{C'^2}{C}\alpha^2 = 1,$$

et, toute réduction faite,

$$\frac{A'^2}{A}\beta^2 + \frac{C'^2}{C}\alpha^2 = 1. \qquad (F)$$

Cette équation, étant indépendante des signes de A', C', fait voir 1° que le lieu géométrique sera toujours de même espèce que la première des deux courbes et concentrique à ces deux courbes;

2° Que, si les deux premières courbes sont semblables, le lieu géométrique sera une courbe de la même espèce; car en désignant par A'' et C'' les demi-diamètres du lieu géométrique, on aura

$$\frac{A''}{A} = \frac{A'^2}{A^2}, \quad \frac{C''}{C} = \frac{C'^2}{C^2},$$

et, si

$$\frac{A'}{A}=\frac{C'}{C},$$

on a évidemment

$$\frac{A''}{A}=\frac{C''}{C} \quad \text{et} \quad \frac{A''}{A'}=\frac{C''}{C'}.$$

3° Le lieu géométrique sera un cercle si l'on a

$$\frac{A'^2}{A}=\frac{C'^2}{C}; \quad \text{d'où} \quad A'=\pm C'\sqrt{\frac{A}{C}};$$

et, par conséquent si A=C, c'est-à-dire si la première courbe est un cercle, la seconde étant soit un cercle (A'=C'), soit une hyperbole équilatère (A'=—C'), le lieu géométrique sera toujours un cercle.

288. Soit DD', T et T', la directrice et les tangentes données, I et I' les points de rencontre des tangentes et de la directrice; faites aux points I et I' les angles TIF, T'I'F, égaux aux angles TID', TI'D' : le point F est le foyer, etc.

295. Soit C (fig. 29) le centre du billard, A la position initiale de la bille, et AMNA la route qu'elle doit suivre; aux points M et N menez les tangentes MT, NT, qui se coupent en T.

D'après le principe connu, l'angle AMR=NMT, et ANS =MNT; et, à cause de MNT=NMT, on a AMR=ANS, et par conséquent AMN=ANM : le triangle AMN est donc isocèle.

Si du point A on abaisse la perpendiculaire AD sur la corde MN, cette droite passera à la fois par le milieu de MN, par le centre C et par le point de concours T des tangentes MT, NT. Joignant MC et NC, on aura AMC=CMD, et ANC=CND.

Soit donc CA=d, CD=x, le triangle AMD donne

$$\frac{d}{x}=\frac{\sqrt{(d+x)^2+R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Elevant au carré et réduisant, on obtient

$$(d+x)[(d-x)(R^2-x^2)-x^2(d+x)]=0.$$

Cette équation est satisfaite

1° par $d+x=0$, d'où $x=-d$;

2° par $(d-x)(R^2-x^2)-x^2(d+x)=0$.

Développant, on trouve, après réduction,

$$x^2+\frac{R^2}{2d}x=\frac{dR^2}{2d};$$

d'où

$$x=-\frac{R^2}{4d}x\pm\sqrt{R^2+8d^2}.$$

Le problème est donc susceptible de trois solutions.

296. Soit

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x') \qquad (1)$$

l'équation d'une normale à l'ellipse au point x', y';

$$y=-\frac{b^2x'}{a^2y'}x \qquad (2)$$

celle de la perpendiculair abaissée du centre sur la normale; et enfin

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 \qquad (3)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

Si l'on élimine x' et y' entre ces trois équations, l'équation finale sera le lieu géométrique demandé.

Des équations (1) et (2) on tire les valeurs de x' et y', qui, substituées dans l'équation (3), donnent, toute réduction faite,

$$(a^2y^2+b^2x^2)(x^2+y^2)^2=(a^2-b^2)^2x^2y^2. \qquad (\text{F})$$

Telle est l'équation du lieu géométrique cherché, qu'il s'agit de construire.

Afin de construire plus facilement cette équation du 6e degré, il est convenable d'avoir recours aux coordonnées polaires, en substituant à la place de x et de y les formules connues

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

ce qui donne, en observant que $a^2 - b^2 = c^2$,

$$\rho^2 = \frac{c^4\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}. \tag{G}$$

Le facteur ρ^4, que l'on a supprimé, fait voir que la courbe a au moins quatre branches qui se coupent à l'origine.

On pourra donner à cette valeur de ρ les formes suivantes :

$$\rho = \pm\frac{c^2\sin\omega}{\sqrt{a^2\tang^2\omega + b^2}},$$

ou

$$\rho = \pm\frac{\frac{1}{2}c^2\sin 2\omega}{\sqrt{c^2\sin^2\omega + b^2}};$$

et, en faisant successivement $\omega = 0$, $50°$, $100°$, $150°$, $200°$, etc., jusqu'à $400°$, on trouvera les valeurs correspondantes de ρ.

On se bornera à déterminer la plus grande valeur de ρ et le point de la courbe qui y correspond. Pour cela, résolvant l'équation (G) par rapport à $\sin\omega$, après avoir remplacé $\cos^2\omega$ par sa valeur $1 - \sin^2\omega$, on trouve

$$\sin^2\omega = \frac{\frac{1}{2}c^4 - c^2\rho^2}{c^4} \pm \frac{1}{2c^4}\sqrt{(c^4 - c^2\rho^2) - 4c^4b^2\rho^2};$$

et, toute réduction faite,

$$\sin\omega = \pm\frac{1}{2c}\left[\sqrt{(b^2+c^2) - (\rho-b)^2} \pm \sqrt{(b^2+c^2) - (\rho+b)^2}\right].$$

D'où l'on voit que, pour que $\sin\omega$ soit réel, il faut que l'on ait

$$\rho - b < \sqrt{b^2+c^2}, \quad \text{et} \quad \rho + b < \sqrt{b^2+c^2}.$$

On verra facilement que la seule valeur maxima de ρ est

$$\rho = -b + \sqrt{b^2+c^2},$$

et correspond à la valeur

$$\sin\omega = \pm\frac{\sqrt{b(\sqrt{b^2+c^2}-b)}}{c}.$$

La courbe se compose de quatre feuilles égales, qui se croisent au centre de l'ellipse et s'étendent entre les axes.

297. Supposant le problème résolu ; et, la parabole demandée étant rapportée à deux axes rectangulaires passant par le sommet donné A (fig. 30), soit $AR = x'$, $TR = y'$, les coordonnées du point de contact T, et $TGX = a$, l'angle inconnu que fait la tangente avec l'axe. On aura d'abord les relations

$$y'^2 = 2px', \qquad (1)$$

$$\text{tang}\, TGX = \alpha = \frac{p}{y'}, \qquad (2)$$

Enfin, abaissant du sommet A la perpendiculaire AH sur la tangente, on aura les deux triangles semblables AGH, GTR, qui donneront, si l'on fait $AH = d$, la troisième relation

$$\frac{d}{x'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2+4x'^2}}. \qquad (3)$$

Les équations (1), (2) et (3), donnent, par une élimination facile,

$$\alpha\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{\sin a}{1-\sin^2 a} = \frac{p}{2d},$$

et enfin

$$\sin a = -\frac{d \pm \sqrt{p^2+d^2}}{p}.$$

Pour construire cette valeur, après avoir mené du point A la perpendiculaire AH sur la tangente donnée, prenez

$HP=2p$, paramètre donné, et $HM=p$; joignez AM, et portez AH sur AI; sur HM décrivez une demi-circonférence, portez MI en MK, et joignez HK; enfin, par le point A menez AX parallèlement à HK : AX sera la direction de l'axe. En effet

$$AM=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HM}^2}=\sqrt{p^2+d^2},$$

$$MI=AM-AH=\sqrt{p^2+d^2}-d,$$

et enfin

$$MI=MK=HM\sin MHK=p\sin TGX;$$

d'où

$$\sin TGX=\sin a.$$

Connaissant la direction de l'axe, le sommet et le paramètre, on aura aisément le foyer, etc.

On construirait de la même manière la seconde valeur de $\sin a$.

Au surplus, il suffira de porter HG en HG′, et l'on aura, en joignant G′A, la direction de l'axe de la seconde parabole qui satisfait à la question.

On peut tirer de cette solution la solution du problème suivant :

Etant donné le sommet et deux tangentes, déterminer la parabole.

En effet, en désignant par d et d' les distances du sommet A aux tangentes T et T′ données, on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{\sin a}{\cos^2 a}=\frac{p}{2d},\quad \frac{\sin a'}{\cos^2 a'}=\frac{p}{2d'}. \qquad (1)\,(2)$$

Désignant par i l'angle des deux tangentes, et observant que $a-a'=i$, on aura

$$\sin a'=\sin a\cos i-\sin i\cos a, \qquad (3)$$

$$\cos a'=\cos a\cos i+\sin i\sin a. \qquad (4)$$

Eliminant sina', cosa' et p, entre les équations (1), (2), (3) et (4), on obtiendra, toute réduction faite,

$$\left.\begin{array}{l} d\sin^2 i\,\mathrm{tang}^3 a + 2d\sin i\cos i\,\mathrm{tang}^2 a \\ +\cos i(d\cos i - d')\,\mathrm{tang}\,a + d'\sin i \end{array}\right\} = 0\ ;$$

équation du 3e degré, qui déterminera la direction de l'axe.

303. A, B, C, étant les trois points inaccessibles, le spectateur, placé en un point quelconque P, mesurera une base quelconque PQ, et déterminera successivement les triangles PAQ, PBQ, PCQ; d'où il conclura la détermination des triangles ABP, BCP, ACP, et par conséquent les trois distances AB, BC, AC. Si AB+BC=AC, les trois points sont en ligne droite.

304. En désignant par b et h la base et la hauteur du triangle, et par x la distance de la parallèle demandée à la base du triangle, on exprimera que le volume engendré par le petit triangle t est la moitié du volume du triangle donné T; or, on a

$$\text{vol. } t = \frac{2}{3}\pi b h^2, \qquad \text{vol. } t = \frac{2}{3}\pi\frac{b}{h}(h-x)^2(2x+h);$$

et par conséquent l'équation de condition sera, toute réduction faite,

$$4x^3 - 6hx^2 + h^3 = 0.$$

Faisant $y=2x$ et $h=1$, on obtiendra l'équation

$$y^3 - 3y^2 + 2 = 0,$$

qui admet pour racine $y=1$. Divisant le premier membre par $y-1$, on trouve pour quotient

$$y^2 - 2y - 2,$$

dont les facteurs sont

$$(y - 1 + \sqrt{3}), \quad y - 1 - \sqrt{3};$$

par conséquent les valeurs de x sont

$$x=\frac{h}{2},\quad x=h\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\quad x=h\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

La seule valeur admissible est $x=\frac{h}{2}$.

307. Soit F, F′, les foyers donnés; T, la tangente, et M, le point de contact. Par le point O, milieu de FF′ et centre de l'ellipse, abaissant une perpendiculaire OP sur la tangente, si l'on désigne par A et B les demi-axes de l'ellipse, on aura pour les équations de la tangente et de la perpendiculaire

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2,\qquad y=\frac{A^2y'}{B^2x'}x;\qquad (1)\ (2)$$

d'où l'on tire

$$OP=d=\frac{A^2B}{\sqrt{A^4-c^2x'^2}},$$

distance du centre à la tangente; et observant que cette expression peut se mettre sous la forme

$$d=\frac{AB}{\sqrt{\left(A+\frac{cx'}{A}\right)\left(A-\frac{cx'}{A}\right)}},$$

si l'on désigne par r et r' les rayons vecteurs menés des foyers au point de contact, on obtiendra cette relation remarquable

$$d=\frac{AB}{\sqrt{rr'}},\qquad (3)$$

d'où

$$\pi AB=\pi d\sqrt{rr'}.$$

L'équation (3) démontre encore le théorème suivant, qui s'applique à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole :

Dans toute courbe du 2e degré douée d'un centre le pro-

duit de la distance du centre à une tangente quelconque par une moyenne proportionnelle entre les rayons menés des foyers au point de contact est constante et égale au rectangle des demi-axes, et plus généralement au quart de la surface de tout parallélogramme circonscrit à la courbe et construit sur deux diamètres conjugués.

On sait que le produit des rayons vecteurs menés des foyers au point de contact est égal au produit des segments de la tangente compris entre le point de contact et les points où la tangente rencontre les axes; de plus, que la moyenne proportionnelle entre ces deux segments est égale à l'ordonnée du cercle qui passe par les extrémités de la tangente et par le centre de l'ellipse, laquelle ordonnée est dirigée suivant la normale à l'ellipse au point de contact; on pourrait par conséquent, d'après cette remarque, énoncer le théorème précédent d'une manière un peu différente, en n'employant que le rectangle de deux droites déterminées.

308. *Première manière.* — Soit $2p$ le paramètre donné; x', y', les coordonnées inconnues du point donné M, rapportées aux axes ordinaires de la parabole; l la distance du point donné M au sommet donné A; α la tangente inconnue de l'angle que fait AM avec l'axe de la parabole : on aura

$$y'^2 = 2px', \quad l^2 = y'^2 + x'^2,$$

$$x' = l \cos \text{MAX} = \frac{l}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

éliminant x' et y' entre ces trois équations, on obtient,

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2p(p \pm \sqrt{p^2 + l^2})},$$

valeur que l'on construira sans difficulté et qui déterminera la direction de l'axe de la parabole.

On en déduira la directrice, le foyer, etc. Le problème n'a que deux solutions.

Deuxième manière. — Si par le point M on mène une perpendiculaire indéfinie à AM, on aura évidemment

$$l^2 = x'(x'+2p).$$

De là cette construction :

Sur AM, comme diamètre, décrire une demi-circonférence. Au point M, sur la droite AM, mener la perpendiculaire indéfinie MH, sur laquelle on prendra $MN = 2p$, paramètre donné ; sur MN, comme diamètre, décrire une circonférence ; joindre le point A et le centre O par une sécante, qui rencontrera cette circonférence en deux points P et Q, tels que AP ou AQ seront les longueurs des abscisses du point M ; alors il suffira de porter la corde AP ou AQ dans la première circonférence, à partir du point A, et la direction de l'axe sera déterminée.

Le reste comme précédemment.

514. — 1° Si le centre et un point de la circonférence sont indiqués, on mesurera la distance de ces deux points inaccessibles en prenant une base arbitraire, selon la méthode connue.

2° Si le centre seul est indiqué, on mesurera l'angle que fait le rayon visuel tangent à la circonférence avec la droite qui joint le point d'observation et le centre du bassin. Le sinus de cet angle exprimera le rapport du rayon du bassin avec la distance du point d'observation au centre, et cette distance étant facile à mesurer, on en conclura la longueur du rayon.

3° Si aucun point n'est indiqué, on déterminera trois points d'observation d'où le bassin soit vu sous le même angle ; le centre du cercle passant par ces trois points sera le centre du bassin, et le problème sera ramené au précédent.

316. Soit m et n les degrés de l'équation proposée et de l'équation primitive, on doit avoir la relation

$$\frac{m(m-1)}{2}=n, \quad \text{d'où} \quad m=\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2},$$

car m est essentiellement positif. Les conditions nécessaires sont donc :

1° que $\sqrt{1+8n}$ soit une quantité rationnelle si m est rationnel ;

2° que $\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$ soit un nombre entier si m est un nombre entier.

La première condition peut être exprimée par

$$1+8n=y^2; \quad \text{d'où} \quad n=\frac{(y+1)(y-1)}{8},$$

relation à laquelle on satisfera seulement en donnant à y toutes les valeurs des nombres impairs

$$y=3,\ 5,\ 7,\ 9\ \ldots\ldots;$$

d'où $$n=1,\ 3,\ 6,\ 10\ \ldots\ldots$$

Et la seconde condition sera exprimée par

$$m=\frac{1+y}{2}=t, \text{ nombre entier;}$$

d'où $$m=2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ldots$$

degrés correspondants aux degrés des équations aux carrés des différences

$$n=1,\ 3,\ 6,\ 10\ldots.$$

On reconnaît dans les valeurs de n les nombres des termes des carrés des monomes, binomes, trinomes, etc.

317. Soit ABC le triangle donné; i, h, les coordonnées du point A ; 0, 0, celles du point B ; a, 0, celles du point C. on aura pour équation de condition, en désignant par x, y,

les coordonnées d'un des points du lieu géométrique,

$$[(y-h)^2+(x-i)^2]a+(y^2+x^2)\sqrt{h^2+(a-i)^2}+[y^2+(x-a)^2]\sqrt{h^2+i^2}=k^3$$

cube donné.

Développant, et réduisant, on trouvera, en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{h^2+(a-1)^2}=b\,, \qquad \sqrt{h^2+i^2}=c\,,$$

$$\left(y-\frac{ah}{a+b+c}\right)^2+\left(x-\frac{c(i+c)}{a+b+c}\right)^2$$
$$=\frac{k^3-ac(a+c)}{a+b+c}+\frac{a^2h^2+c^2(i+c)^2}{(a+b+c)^2},$$

équation d'un cercle dont le centre est au point dont les coordonnées, faciles à voir d'après la forme de cette équation, ne sont autre chose que les coordonnées du centre du cercle inscrit au triangle.

On déterminera facilement le rayon dans chaque cas particulier.

On peut déterminer le rayon par la condition que k^3 soit une fonction donnée des côtés; et réciproquement, le rayon étant donné, on déterminera la quantité k^3.

525. Soit $2p$ le paramètre inconnu; x', y', les coordonnées inconnues du point de contact, la parabole étant rapportée à son sommet; a la tangente connue de l'angle que la tangente fait avec l'axe : on aura les relations

$$\frac{p}{y'}=a, \qquad y'^2=2px'; \qquad (1)\,(2)$$

et, d et x étant l'ordonnée connue et l'abscisse inconnue du point donné, on a de plus

$$d^2=2px. \qquad (3)$$

Enfin désignant par b la distance du pied de l'ordonnée du point donné au point où la tangente rencontre l'axe, on aura encore

$$x'+x=b. \qquad (4)$$

On tire de ces quatre équations

$$x(b-x)=\frac{d^2}{4a^2}.$$

Menant par le point donné une parallèle à la tangente, et désignant par l la distance du point où elle rencontre l'axe au pied de l'ordonnée de ce point donné, on aura

$$l=\frac{d}{a},$$

et le problème revient à déterminer les deux côtés contigus d'un rectangle dont on connait la somme b et la surface $\left(\frac{l}{2}\right)^2$.

526. Ellipse passant par l'origine. On en tire

$$y=-\frac{x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3x^2+16x}.$$

Et par conséquent ses diamètres conjugués sont déterminés de direction par les équations

$$y=-\frac{x}{2},\qquad x=\frac{8}{3};$$

et leurs longueurs par les valeurs des coordonnées du centre

$$x_c=\frac{8}{3},\quad y_c=-\frac{4}{3}.$$

Connaissant un système de diamètres conjugués de grandeur et de direction, on construira facilement la courbe

535. L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, le grand axe étant pris pour axe des abscisses, on aura

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$

équation de l'ellipse ; et, en désignant par a l'angle de deux cordes supplémentaires, comme $A^2-B^2=c^2$,

$$\text{tang}\,a=-\frac{2AB^2}{c^2y};$$

d'où l'on conclut que dans la demi-ellipse correspondante au grand axe les angles supplémentaires sont tous obtus.

La tangente étant négative, l'angle sera d'autant plus grand que sa tangente sera plus petite; d'où il suit que le maximum de l'angle a pour tangente $-\frac{2AB}{c^2}$, et correspond à l'angle dont le sommet est à l'extrémité du petit axe.

En prenant pour axe des abscisses le petit axe de l'ellipse, et désignant par a' l'angle de deux cordes supplémentaires, on aura

$$\tang a' = \frac{2A^2B}{c^2 y};$$

d'où l'on conclut que les angles des cordes supplémentaires inscrits dans la demi-ellipse correspondante au petit axe sont tous aigus, et que le plus petit de ces angles a pour expression de sa tangente

$$\frac{2AB}{c^2},$$

et correspond à l'extrémité du grand axe.

On voit aisément que les deux angles maximum et minimum sont supplémentaires l'un de l'autre.

336. x', y'; x'', y'', étant les coordonnées de deux points quelconques de l'ellipse, on aura, en vertu des équations de la courbe et de la tangente, les quatre relations suivantes :

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2, \qquad (1)$$

$$A^2yy' + B^2xx' = A^2B^2, \qquad (2)$$

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2, \qquad (3)$$

$$A^2yy'' + B^2xx'' = A^2B^2; \qquad (4)$$

et enfin, pour exprimer que les tangentes sont perpendiculaires entre elles,

$$1 + \frac{B^4x'x'}{A^4y'y''} = 0. \qquad (5)$$

Les équations (3) et (5) donnent les valeurs de x'' et de y''; en les substituant dans (4) on obtient

$$(A^2xy'-B^2yx')^2=A^6x'^2+B^6x'^2\,; \qquad (6)$$

enfin éliminant x', y', entre les équations (1), (2) et (6), on obtient

$$x^2+y^2=A^2+B^2,$$

circonférence concentrique à l'ellipse et dont le rayon est la demi-diagonale du rectangle construit sur les axes.

537. De chacun des points donnés, comme centre, et d'un rayon égal à sa distance à la directrice, décrire un cercle : le foyer se trouvera au point d'intersection des deux circonférences. — Deux solutions.

538. Soit α la tangente de l'angle que la tangente donnée fait avec l'axe dont la direction est inconnue, $2p$ le paramètre inconnu de la parabole, d la distance du sommet donné à la tangente; x' y', les coordonnées du point donné, l la distance de ce point au sommet : on aura les quatre relations suivantes :

$$\alpha\sqrt{1+\alpha^2}=\frac{p}{2d}, \qquad (1)$$

$$l^2=y'^2+x'^2, \qquad (2)$$

$$y'^2=2px', \qquad (3)$$

$$\frac{x'}{y'}=\frac{a+\alpha}{1-a\alpha}, \qquad (4)$$

en désignant par a la tangente de l'angle que fait avec la tangente donnée la droite qui joint le sommet et le point donnés.

Eliminant entre ces quatre équations les inconnues x', y'

et p, on obtiendra, toute réduction faite,

$$l(a+\alpha)^2 = 4d\alpha(1+\alpha^2)\sqrt{1+a^2},$$

équation finale, qui déterminera la direction de l'axe de la parabole.

344. Soit

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

l'équation générale du 3e degré. Si a et $-a$ sont ces racines, le premier membre de l'équation sera divisible par x^2-a^2. Effectuant cette division, le reste

$$(q+a^2)x+(r+pa^2)$$

devra être égal à zéro indépendamment d'aucune valeur de x; et par conséquent

$$q+a^2=0, \qquad r+pa^2=0.$$

Eliminant a^2 entre ces équations, on obtiendra

$$r-pq=0,$$

relation demandée.

De plus les deux racines seront $a=\pm\sqrt{-q}$, et la troisième $x=-p$.

346. Prenant pour axes des coordonnées les axes fixes, et désignant par a, b, c, les trois côtés du triangle donné; par x, y, les coordonnées variables du sommet A; par α, 0; 0, β, les coordonnées aussi variables des deux autres sommets B et C, qui s'appuient sur les axes fixes, on aura les équations

$$x^2+(y-\beta)^2=c^2, \quad y^2+(x-\alpha)^2=b^2, \quad \alpha^2+\beta^2=a^2;$$

éliminant α et β entre ces trois équations, on trouve pour l'équation finale cherchée

$$(b^2+c^2-a^2)\pm 2y\sqrt{c^2-x} \mp 2x\sqrt{b^2-y^2}=0.$$

Développant cette équation, on obtiendra une équation du 4e degré, décomposable en deux facteurs du 2e degré,

$$c^2y^2+b^2x^2\mp 4Sxy=\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4};$$

ou bien

$$c^2y^2+b^2x^2\mp 2bc\sin Axy=b^2c^2\cos^2 A, \qquad \text{(F)}$$

éllipse, hyperbole ou deux droites, selon que $A<100°$, $A>100°$, $A=100°$.

Ce dernier cas particulier est facile à reconnaître. En effet, si $A=100°$, on a $a^2=b^2+c^2$, et l'équation (F) donne

$$y=\pm\frac{b}{c}x.$$

Si l'on a en même temps $A=100°$, $b=c$, on trouve

$$y=\pm x;$$

et de là ce théorème :

Si l'on fait tourner un carré sur deux axes fixes rectangulaires de maniere qu'il reste constamment appuyé sur ces axes par deux de ses sommets, son centre restera constamment sur la bissectrice de l'angle des axes.

Si $A<100°$, l'équation (F) donnera

$$y=\pm\frac{b\sin A}{c}x\pm\frac{b}{c}\cos A\sqrt{c^2-x^2}.$$

On construira le diamètre

$$y=\pm\frac{b\sin A}{c},$$

dont les extrémités auront pour coordonnées

$$x_1=c, \qquad x_2=-c,$$
$$y_1=b\sin A; \qquad y_2=-b\sin A.$$

D'ailleurs le demi-diamètre conjugué dirigé suivant l'axe des y a pour longueur

$$y_0=b\cos A.$$

Connaissant un système de diamètres conjugués de grandeur et de direction, on construira la courbe sans difficulté.

Nous laissons au lecteur le soin de construire l'hyperbole correspondante à $A > 100°$.

347. On appelle *directrice* des courbes du 2e degré une droite telle que le rapport des distances de chaque point de la courbe au foyer et à cette droite est constant.

Soit M un point de l'ellipse dont l'abscisse est x : la distance de ce point au foyer est exprimée par

$$MF = \frac{A^2 - cx}{A}.$$

Soit $X = d$ l'équation d'une droite perpendiculaire au grand axe, et MQ la distance du point M à cette droite, on aura

$$MQ = d - x;$$

d'où l'on tire

$$\frac{MF}{MQ} = \frac{c\left(\frac{A^2}{c} - x\right)}{A(d-x)},$$

et ce rapport sera constant, quel que soit x, si l'on a

$$\frac{A^2}{c} = d,$$

ce qui détermine la directrice.

Le rapport constant $r = \frac{c}{A} =$ l'excentricité.

Soit

$$A^2\beta y' + B^2\alpha x' = A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de la corde de contact des deux tangentes menées à l'ellipse par le point α, β; faisant $y' = 0$, on a $x' = \frac{A^2}{\alpha}$; et, si $\alpha = \frac{A^2}{c}$, $x' = c$: donc la directrice est la polaire du foyer; ce qui donne encore un moyen pour déterminer la directrice.

L'équation de la perpendiculaire à la corde de contact (1) menée par le point α, β, est

$$Y-\beta=\frac{A^2\beta}{B^2\alpha}(X-\alpha);$$

faisant $Y=0$, on a

$$X_0=\frac{c^2}{\left(\frac{A^2}{\alpha}\right)};$$

et si $\alpha=\frac{A^2}{c}$, on obtient $X_0=c$.

Donc la perpendiculaire menée par un point quelconque de la directrice sur la corde de contact des deux tangentes qu'on peut mener à l'ellipse par ce point passe nécessairement par le foyer.

Ces deux propriétés s'appliquent également à l'hyperbole et à la parabole.

548. Soit F, M, le foyer et le point donnés; $2a$, $2b$, les axes de l'ellipse · mener la droite indéfinie FM, et prendre $FMG=2a$; du point F, comme centre, avec un rayon $=2\sqrt{a^2-b^2}$, et du point M, comme centre, et d'un rayon MG, décrire deux arcs de cercle, qui détermineront par leur intersection le 2e foyer. Connaissant les deux foyers et un point de la courbe, l'ellipse sera facilement déterminée.

Le problème a généralement deux solutions.

553. Soit B et H la base et la hauteur; en prenant pour base la face donnée, désignons par x_1 la distance du premier plan sécant au sommet du tétraèdre, et par b la section déterminée par ce plan : on aura les relations

$$\frac{bx_1}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{BH}{3}\right), \qquad \frac{B}{b}=\frac{H^2}{x_1^2};$$

d'où l'on tire, par une élimination facile,

$$x_1=H\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

résultat indépendant de la surface de la base.

Les distances des autres plans sécants au sommet du tétraèdre seront

$$x_2 = \text{H}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \quad x_3 = \text{H}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

354. Soit a une des racines égales; le premier membre de l'équation proposée sera divisible par x^2-a^2; effectuant cette division, on obtient pour reste

$$(4-2a^2)x+(a^4-10a^2+16),$$

et pour quotient

$$x^2-2x+a^2-10\ ;$$

égalant à zéro les coefficients du polynome, reste de la division, on obtient

$$4-2a^2=0, \qquad a^4-10a^2+16=0.$$

De la première on tire $a=\pm\sqrt{2}$ pour les racines demandées; la seconde est satisfaite par la valeur de $a^2=2$.

Le quotient égalé à zéro, après la substitution de a^2, deviendra

$$x^2-2x-8=0; \quad \text{d'où} \quad x=1\pm3;$$

et par conséquent les racines demandées sont

$$x=+\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2},\ x=4,\ x=-2.$$

On résoudra facilement et d'une manière générale le problème suivant :

A quel signe peut-on reconnaître qu'une équation donnée du 4e degré a deux racines égales et de signe contraire?

Il suffira de diviser le premier membre de l'équation

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

par x^2-a^2, ce qui donnera pour reste

$$(r+pa^2)x+s+a^2(q+a^2).$$

Egalant à zéro les coefficients

$$r+pa^2=0, \qquad s+a^2(q+a^2)=0,$$

et éliminant a^2 entre ces équations, on trouvera, toute réduction faite,

$$r^2-pqr+p^2s=0.$$

D'ailleurs les racines égales et de signe contraire seront données par la relation

$$a^2=-\frac{r}{p}.$$

Le quotient de la division

$$x^2+px+(q+a^2),$$

égalé à zéro, achèvera de déterminer les deux autres racines de l'équation.

355. Du foyer F abaissant une perpendiculaire FP sur l'asymptote SPS', prenant ces droites pour axes des ordonnées et des abscisses, et désignant FP par d, et par α et β les ordonnées d'un sommet A, l'équation de la droite AF sera

$$y-\beta=\frac{d-\beta}{-\alpha}(x-\alpha), \qquad (1)$$

et par conséquent l'équation de la perpendiculaire AH élevée par le point A sur AF sera

$$Y-\beta=\frac{\alpha}{d-\beta}(X-\alpha), \qquad (2)$$

et il suffira d'exprimer que $AH=FP=d$. Or, le point de rencontre H de la droite AH (2) et de l'asymptote SPS', axe des abscisses, a pour coordonnées

$$Y=0,\ X=\alpha-\frac{\beta}{\alpha}(d-\beta);$$

et par conséquent la distance AH est exprimée par la relation

$$AH=\sqrt{\beta^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(d-\beta)^2}.$$

On aura donc pour équation du lieu géométrique demandé

$$\alpha=\pm\beta\sqrt{\frac{d-\beta}{d+\beta}}.$$

Passant aux coordonnées polaires au moyen des formules $\alpha=\rho\cos\omega$, $\beta=\rho\sin\omega$, on trouvera, toute réduction faite,

$$\rho=\frac{d\cos2\omega}{\sin\omega};$$

et, si l'on transporte l'origine au foyer donné F, en prenant pour axe des abscisses une parallèle menée par ce point à l'asymptote donnée, changeant α en $-d-\beta$, et passant ensuite aux coordonnées polaires, on trouvera facilement, après avoir réduit,

$$\rho=d\tan\frac{1}{2}\omega, \quad \text{ou} \quad \rho=d\cot\frac{1}{2}\omega.$$

Cette courbe, semblable au folium de Descartes, passe par le foyer donné.

On résoudra par un moyen tout à fait analogue le problème suivant :

Trouver le lieu géométrique des foyers des hyperboles qui ont un même sommet et une asymptote commune.

356. Soit

$$y^2=2px+qx^2 \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe quelconque du 2e degré, l'origine des axes coordonnées étant au point donné; désignons par α, β et ρ, les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle

quelconque : l'équation de ce cercle sera

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta=\rho^2, \qquad (2)$$

θ étant l'angle des axes coordonnés, et par conséquent l'angle des diamètres conjugués.

Pour exprimer que le cercle (2) est tangent à la courbe (1) à l'origine, il faut et il suffit qu'en y faisant $x=0$ on trouve $y^2=0$; développant l'équation (2), on obtient

$$y^2+2xy\cos\theta+x^2 \begin{array}{c|c|c} -2\beta & y\quad -2\alpha & x \quad +\beta^2 \\ -2\alpha\cos\theta & -2\beta\cos\theta & +\alpha^2 \\ & & +2\alpha\beta\cos\theta \\ & & -\rho^2 \end{array} =0\,;$$

et, d'après la remarque précédente, on aura les relations

$$\beta+\alpha\cos\theta=0, \quad \beta^2+\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta-\rho^2=0. \qquad (3)$$

L'équation d'un des cercles tangents à l'origine sera donc

$$y^2+2xy\cos\theta+x^2-2(\alpha+\beta\cos\theta)x=0. \qquad (4)$$

Des équations (3) on tire sans difficulté

$$\alpha+\beta\cos\theta=\pm\rho\sin\theta.$$

L'équation (4) devient donc

$$y^2=-2xy\cos\theta-x^2\pm 2\rho\sin\theta x. \qquad (5)$$

Retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (5), on obtient, toute réduction faite,

$$y=-\frac{(1+q)}{2\cos\theta}x-\frac{(p\mp\rho\sin\theta)}{\cos\theta},$$

équation de la droite qui joint les deux points d'intersection des deux courbes, autres que le point donné. Le coefficient de x étant indépendant de ρ, on en déduit que cette direction est constante pour tous les cercles tangents à la courbe à l'origine.

357. Soit F, A et TT', le foyer, le sommet et la tangente

donnés; du foyer abaissez une perpendiculaire FP sur la tangente; joignez PA, et par le point I, milieu de PA, élevez la perpendiculaire IO, qui, par sa rencontre avec l'axe AF, déterminera le centre O de l'ellipse.

364. Soit a, b, c, les côtés du triangle ABC (fig. 31), a l'hypoténuse; on a évidemment

$$2CAD=AD.CD,\quad 2DAE=DE.AE,\quad 2DEF=EF.DF.$$

Or, d'après les propriétés du triangle rectangle, on a

$$CD=\frac{\overline{AC}^2}{CB},\quad \overline{AD}^2=CD.DB.$$

Mettant dans la 2ᵉ équation pour CD sa valeur, et, remarquant que $DB=BC-CD$, et réduisant, on trouve

$$AD=\frac{AC.AB}{BC};$$

donc

$$2CAD=\frac{b^3c}{a^2}.$$

On trouvera de même, à cause de $DB=\frac{\overline{AB}^2}{BC}$,

$$2DAE=\frac{b^3c^3}{a^4};$$

et par un calcul analogue on obtiendra

$$2DEF=\frac{b^3c^5}{a^6},\quad 2EFG=\frac{b^3c^7}{a^8}\ldots..$$

On aura donc pour la somme de ces triangles

$$2ACD+2DAE+2EDF+\ldots..=\frac{b^3c}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4}{a^4}+\ldots..\right).$$

Or, la somme de ces surfaces partielles est évidemment égale au double du triangle proposé, $2ABC=bc$. On doit donc avoir

$$\frac{b^3c}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4}{a^4}+\ldots..\right)=bc,$$

ce qui exige nécessairement qu'on ait la relation

$$1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4}{a^4}+\ldots\ldots=\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{1-\frac{c^2}{a^2}},$$

et aussi

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4}{a^4}+\ldots\ldots=\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{\left(\frac{c^2}{a^2}\right)}{\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)};$$

d'où l'on déduit la démonstration géométrique de la limite de la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante

$$L=\frac{a}{1-q},$$

laquelle est égale au premier terme divisé par l'excès de l'unité sur la raison.

Si l'on suppose connue la formule $L=\frac{a}{1-q}$, la suite précédente servira à déterminer l'aire du triangle rectangle; en effet, on a

$$\frac{b^3c}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4}{a^4}+\ldots\ldots\right)=\frac{b^3c}{a^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^3c}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}=bc,$$

et par conséquent

$$2ABC=bc; \quad \text{d'où} \quad ABC=\frac{bc}{2}.$$

365. Soit

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2, \qquad (1)$$
$$A^2yy''+B^2xx''=A^2B^2, \qquad (2)$$
$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2, \qquad (3)$$
$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2, \qquad (4)$$

les équations de deux tangentes à l'ellipse aux points x', y';

x'', y'', et les équations de la courbe pour chacun de ces points. Les diamètres passant par les points de contact étant conjugués, on aura, d'après la relation connue,

$$aa' = -\frac{B^2}{A^2}, \qquad 1 + \frac{B^2 x' x''}{A^2 y' y''} = 0. \qquad (5)$$

Eliminant entre ces cinq équations les indéterminées x', y'; x'', y'', on trouvera sans difficulté

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = 2A^2 B^2,$$

équation d'une ellipse concentrique dont les axes sont $2A\sqrt{2}$, $2B\sqrt{2}$, et par conséquent semblable à la proposée.

On trouverait un résultat analogue pour l'hyperbole.

366. IT, IT' (fig. 32), étant les tangentes données, O et M les points de contact, joindre OM, et, par le milieu A, mener IA, qui déterminera la direction de l'axe de la parabole. Du point O menant OX parallèle à IA, les droites OX, OYT, formeront un système d'axes conjugués.

Pour déterminer le paramètre du diamètre OX, mener MP parallèle à OY; porter MP en OG; mener GH parallèle à OY, et qui rencontre en H MO prolongée: GH sera le paramètre. En effet les triangles semblables MOP, GOH, donnent

$$\frac{PM}{HG} = \frac{OP}{OG} = \frac{OP}{MP}; \qquad \text{d'où} \qquad \underset{(y^2=2px)}{\overline{PM}^2 = HG.OP},$$

et par conséquent $HG = 2p$.

367. La directrice étant donnée, la direction de l'axe transverse sera déterminée.

Soit a la tangente de l'angle que fait la tangente donnée avec cette direction, t la tangente de l'angle que fait l'asymptote avec cette même direction, A et B les demi-axes de l'hyperbole; et, enfin, x', y', les coordonnées inconnues

du point de contact : on aura

$$\frac{B^2x'}{A^2y'}=a\,,\qquad \frac{B}{A}=t. \qquad (1)(2)$$

Par le point de rencontre D de l'asymptote et de la directrice menons, perpendiculairement à la directrice une droite, qui rencontre la tangente donnée en K ; et, I étant le point de rencontre de la tangente et de l'asymptote, soit fait $DI=c$, $DK=b$: on aura pour relation

$$\frac{\left(\frac{A^2}{x'}\right)}{b}=\frac{c+A}{c}. \qquad (3)$$

On sait en effet que la directrice rencontre l'asymptote à une distance du centre égale au demi-axe transverse, et que $\frac{A^2}{x'}$ représente la distance de ce même centre au point où la tangente coupe l'axe transverse.

Enfin pour les points de contact x', y', on a l'équation

$$A^2y'^2-B^2x'^2=-A^2B^2; \qquad (4)$$

éliminant x', y' et B, entre les quatre équations (1), (2), (3) et (4), on obtiendra, toute réduction faite,

$$A=\pm\frac{abc}{\sqrt{a^2c^2-t^2c^2\mp ab}}.$$

On prendra en même temps le signe supérieur ou le signe inférieur.

Après avoir construit cette double valeur de A, on la portera sur l'asymptote à droite et à gauche du point D.

372. Soit A'B'C' (fig. 33) le triangle demandé, égal au triangle donné ABC, et dont les côtés A'B', A'C', B'C', passent chacun par un des points donnés O, P, Q.

Les sommets A' et B' se trouveront sur des segments capables des angles 200°—A, 200°—B, et le problème revien-

dra à mener par le point d'intersection O des deux circonférences données une sécante OA'B', telle que la différence A'B' des cordes comprises soit d'une longueur donnée AB.

Passons à la résolution de ce problème :

Soit, en supposant le problème résolu, OA'B' (fig. 34) la sécante demandée, telle que $OB'-OA'=2l$, longueur donnée; des centres G, G', menant les perpendiculaires GI, G'H, on aura $OI=\frac{1}{2}OB'$, $OH=\frac{1}{2}OA'$, $OI-OH=\frac{1}{2}(OB'-OA')=l$; menant GK parallèle à OA'B', on aura $GK=IH=l$, et le triangle GKG' sera déterminé.

Donc, sur GG', distance des centres, décrire une circonférence, sur laquelle on portera du point G une corde GK ou GK', égale à la moitié de la longueur donnée, et les sécantes OA'B', OA''B'', parallèles à GK, GK', satisferont à l'énoncé.

Ce problème a encore deux autres solutions, que l'on trouvera de la manière suivante :

Décrire un cercle symétrique à G' par rapport au point O et tangent à ce cercle en ce même point. Soit G'' le centre de ce cercle; faites sur les cercles G et G'' la même construction que précédemment, et les deux sécantes obtenues par ce moyen répondront encore à la question.

Il suit de cette analyse que le premier problème est susceptible de 12 solutions généralement.

373. *Première manière.* — **Soit x et y le rayon de la base et la hauteur du cylindre, R le rayon de la sphère et V le volume donnés, on aura les relations**

$$\pi x^2 y = V, \tag{1}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2; \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$y^3 - 4R^2 y + \frac{4V}{\pi} = 0. \tag{3}$$

Cette équation servira à déterminer y, et par suite on connaîtra x par l'une ou l'autre des équations (1) et (2).

Quant au volume maximum des cylindres inscriptibles dans la sphère, on peut le tirer directement de cette même équation (3); il suffit pour cela de chercher la condition pour que cette équation n'ait qu'une seule racine réelle positive et une seule racine négative, deux des trois racines étant alors égales; or, en prenant l'équation générale de la forme

$$x^3+px+q=0, \qquad (e)$$

on sait que cette condition est remplie lorsque

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0; \qquad (c)$$

comparant les équations (2) et (3), et ayant égard à la condition (c), on obtiendra

$$V=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}},$$

et les valeurs correspondantes de x et y,

$$x=\frac{R\sqrt{2}}{3}, \qquad y=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Deuxième manière. — On peut parvenir au même résultat en observant que les valeurs de x et de y sont données par les intersections de l'hyperbole cubique (1) et du cercle (2), lesquelles courbes peuvent se rencontrer en deux points, se toucher, ou n'avoir aucun point commun, selon les différentes valeurs attribuées à V, et que par conséquent le maximum de la valeur V correspondra au contact des deux courbes.

Pour exprimer que les courbes (1) et (2) se touchent, il suffit d'exprimer qu'elles ont une même tangente. Soit donc x, y, les coordonnées du point de contact; les équations des

tangentes seront

$$Y-y=-\frac{2y}{x}(X-x),\qquad Y-y=-\frac{4x}{y}(X-x);$$

et puisque ces tangentes se confondent en une seule et même droite, on aura

$$\frac{2y}{x}=\frac{4x}{y},\quad \text{d'où}\quad y^2=2x^2,$$

et par suite

$$x=\frac{R\sqrt{2}}{3},\qquad y=\frac{2R}{\sqrt{3}},\qquad V=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

375. Mener deux droites indéfinies sous l'inclinaison donnée, diviser les angles adjacents en deux parties égales, et la direction des axes de l'hyperbole sera déterminée.

1° Si $4A^2+4B^2$ est donné, porter $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ sur l'axe transverse, et les foyers seront déterminés. Ou bien encore porter $\sqrt{A^2+B^2}$ sur l'une des asymptotes, toujours à partir de leur point de concours, et de l'extrémité de cette distance abaisser une perpendiculaire sur l'axe transverse, la grandeur des axes sera connue.

2° Si $4A^2-4B^2$ est donné, comme on connaît aussi $\frac{A}{B}$, on déterminera aisément A et B, etc.

376. Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+D=0,\qquad A'y^2+B'xy+C'x^2+D'=0,$$

les équations des deux courbes, rapportées à deux axes quelconques. Ces équations peuvent être ramenées à la forme

$$ay^2+2bxy+cx^2+1=0,\qquad a'y^2+2b'xy+c'x^2+1=0,$$

et donnent par soustraction

$$(a-a')y^2+2(b-b')xy+(c-c')x^2=0;$$

d'où

$$y=-\frac{b-b'}{a-a'}x\pm\frac{x}{a-a'}\sqrt{(b-b')^2-(a-a')(c-c')}, \qquad (4)$$

équations de deux lignes droites passant par l'origine.

On voit par ce résultat que les quatre points d'intersection des courbes proposées sont les sommets d'un parallélogramme inscrit à la fois dans les deux courbes, et par conséquent les droites menées par le centre commun parallèlement aux côtés du parallélogramme forment un système de diamètres conjugués commun aux deux courbes.

Le problème revient donc à trouver les points d'intersection d'une courbe du 2e degré avec une droite passant par son centre, problème déjà résolu.

Soit

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad (1)$$

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{x'^2}{a'^2}=1, \qquad (2)$$

les équations de deux ellipses rapportées à leur centre et à leurs axes ; on rapportera la seconde courbe aux mêmes axes que la première en substituant dans l'équation (2) les valeurs connues

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \quad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha,$$

qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires de même origine, α représentant l'angle que font entre eux les grands axes des ellipses ; et l'on obtiendra pour l'équation transformée de la seconde ellipse

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}\right)y^2-2\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a'^2}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{b'^2}\right)xy+\left(\frac{\cos^2\alpha}{a'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b'^2}\right)x^2-1=0; \quad (3)$$

les équations (1) et (3) donnent, par soustraction,

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}-\frac{1}{b^2}\right)y^2-2\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right)xy+\left(\frac{\cos^2\alpha}{a'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b'^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2=0.$$

d'où l'on tire

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right)\pm\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}\right)^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{a'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b'^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{\cos^2\alpha}{b'^2}+\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}-\frac{1}{b^2}\right)}}{\frac{\cos^2\alpha}{b_1^2}+\frac{\sin^2\alpha}{a'^2}-\frac{1}{b^2}}$$

équation de deux lignes droites, que l'on pourra contruire, après les avoir simplifiées.

377. Soit F, A, M, les points donnés; joignez AF par une droite indéfinie et abaissez MP perpendiculaire sur cette droite. Supposant la position de la directrice connue, soit DD' perpendiculaire à AF, et MQ perpendiculaire à DD', on aura, d'après la propriété de la directrice,

$$\frac{AF}{AD}=\frac{MF}{MQ}=\frac{MF}{PD}; \quad \text{d'où} \quad \frac{AD}{PD}=\frac{AF}{MF},$$

et la question revient à trouver sur la droite AP un point tel que le rapport de ses distances aux points A et P soit égal à un rapport donné.

Connaissant la directrice, le problème n'offre plus aucune difficulté.

380. Les points A et B (fig. 35) étant fixes, le nœud coulant M n'a que la liberté de se mouvoir sur une ellipse dont les points A et B sont les foyers et dont le grand axe est égal à la longueur totale du cordon.

1° Soit X et Y les tensions des deux cordons AM, BM, tensions qui sont égales puisque ces deux cordons font partie d'un seul et même cordon AMB; soit P enfin le poids donné. Le point M devant rester sur l'ellipse, il faut pour unique condition que la verticale MP, direction du poids, soit dirigée suivant la normale à l'ellipse au point M. En effet, si cette force n'était pas dirigée suivant la perpendiculaire à la tangente au point M, on pourrait la supposer décom-

posée en deux autres forces, dirigées, l'une suivant la tangente, l'autre suivant la perpendiculaire à la tangente, laquelle sera détruite par la résistance de la courbe sur laquelle le point M est assujetti à rester constamment; quant à l'autre force dirigée suivant la tangente, elle ferait glisser le corps suivant cette droite et l'équilibre n'existerait pas.

Quant à la relation de la tension du cordon X et de la force P, on a, en désignant par 2α l'angle AMB,

$$\frac{X}{P}=\frac{\sin BPM}{\sin AMB}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha};$$

d'où

$$X=\frac{P}{2\cos\alpha}.$$

On a fait abstraction du poids du cordon lui-même. Si l'on voulait en tenir compte, il faudrait combiner le poids donné avec le poids du cordon, nouvelle force verticale appliquée au centre de gravité du cordon.

Pour résoudre la seconde partie du problème, prenons pour axe des x l'horizontale AX menée par le point A, et pour axe des y la verticale AY, il suffira d'exprimer que les angles BMR, RMA, sont constamment égaux, et par conséquent les angles AIM et MAI. Désignant par x, y, les coordonnées du point M, a et b les coordonnées connues du point B, les équations des cordons AM, BM, seront respectivement

$$Y=\frac{y}{x}X, \qquad Y-b=\frac{y-b}{x-a}(X-a);$$

et l'équation de condition

$$\frac{y-b}{x-a}=-\frac{y}{x};$$

d'où l'on tire $$2xy-ay-bx=0, \qquad \text{(F)}$$

équation d'une hyperbole équilatère dont le centre est en O, milieu de AB, et dont les asymptotes sont parallèles aux

axes. De plus la courbe passe par les points A et B, car l'équation (F) est satisfaite par $x=0$, $y=0$, et par $x=a$, $y=b$.

385. Soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre, point d'intersection des diagonales du losange, et à ses axes, dirigés suivant les mêmes diagonales, dont la longueur est exprimée par $2c$, $2d$.

En considérant un des côtés quelconques, tangent à la courbe au point x', y', on aura les relations

$$c=\frac{a^2}{x'}, \qquad d=\frac{b^2}{y'},$$

et substituant les valeurs de x' et y', tirées de ces équations, dans l'équation de la courbe

$$a^2y'^2+c^2x'^2=a^2b^2,$$

on trouvera, toute réduction faite,

$$\frac{b^2}{d^2}+\frac{a^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

De plus, d'après la condition de l'énoncé, on a

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \qquad (3)$$

Et l'on obtient, en combinant les équations (2) et (3), les valeurs

$$a=\frac{c}{\sqrt{2}}, \qquad b=\frac{d}{\sqrt{2}},$$

qui détermineront les longueurs des demi-axes. Les axes sont égaux à la moitié des diagonales des carrés construits sur les diagonales du losange.

Il est facile de se convaincre au surplus que l'ellipse demandée touche en leurs milieux les côtés du losange.

386. Soit F le foyer donné, 2A, 2B, les axes, TT' la tangente.

Du foyer F menez FP perpendiculaire à la tangente. Du point F, comme centre, et d'un rayon égal à $\sqrt{A^2-B^2}$, décrivez une circonférence; du point P comme centre, et d'un rayon égal à A, décrivez une seconde circonférence. Le centre de l'ellipse sera un des points d'intersection de ces deux circonférences.

387. Soit T et T' les tangentes communes, C le centre commun donné, et F un des foyers des courbes qui satisfont à l'énoncé; si de ce point on abaisse les perpendiculaires FP, FP', sur les tangentes T et T'; puis, qu'on méne CP, CP', CF; et par le centre C les droites CQ, CQ', paralléles aux tangentes et qui rencontrent les perpendiculaires FP, FP', aux points Q et Q', on aura, d'aprés la propriété des triangles obliquangles,

$$\overline{CF}^2=\overline{CP}^2+\overline{FP}^2-2FP.PQ, \quad \overline{CF}^2=\overline{CP'}^2+\overline{FP'}^2-2FP'.P'Q';$$

et si l'on observe que

$$\overline{FP}^2=(FQ+PQ)^2=\overline{FQ}^2+\overline{PQ}^2+2FQ.PQ,$$
$$2FP.PQ=2PQ(FQ+PQ)=2PQ.FQ+2\overline{PQ}^2,$$

et qu'en même temps $CP=CP'=a$, demi-axe transverse de la courbe qui répond au foyer F, on aura, en faisant $CF=d$, $PQ=h$, $P'Q'=h'$,

$$d^2=a^2+\overline{FQ}^2-h^2, \quad d^2=a^2+\overline{FQ'}^2-h'^2,$$

d'où l'on tire

$$\overline{FQ}^2-\overline{FQ'}^2=h^2-h'^2;$$

et le problème revient à trouver le lieu géométrique des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux droites données soit constante et égale à un carré donné $(h^2-h'^2)$.

Soit CQY, CQ′X, les droites données prises pour axes, faisant entre elles un angle quelconque θ, et (x, y) un point F du lieu géométrique demandé.

La distance de ce point aux axes sera évidemment

$$FQ = x \sin\theta, \qquad FQ' = y \sin\theta;$$

d'où l'on tirera sans difficulté

$$y^2 - x^2 = -\left(\frac{h^2 - h'^2}{\sin^2\theta}\right),$$

équation d'une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les bissectrices des angles adjacents des droites données.

On pourra aussi construire facilement les diamètres égaux de l'hyperbole, dirigés suivant les droites CX, CY; ensuite les asymptotes; et par conséquent on déterminera les axes de grandeur et de direction.

De là on peut déduire facilement la solution du problème suivant :

Déterminer directement les foyers d'une courbe du 2e degré qui a son centre en un point donné et assujettie à être tangente à trois droites données.

Les foyers seront à l'intersection de deux hyperboles équilatères concentriques construites d'après la méthode précédente.

388. Supposant l'hyperbole construite, et désignant par x', y', les coordonnées du point de contact, par A et B les demi-axes, par P et p les perpendiculaires abaissées du sommet sur l'asymptote et sur la tangente, enfin par a la tangente de l'angle de l'asymptote et de la tangente, on aura les relations

$$p = \frac{AB^2(x' - A)}{\sqrt{A^4 y'^2 + B^4 x'^2}}, \qquad (1)$$

$$\frac{B^2x'}{A^2y'}=\frac{B+aA}{A-Ba}, \qquad (2)$$

$$P=\frac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (3)$$

$$A^2y'^2-B^2x'^2=-A'^2B'^2. \qquad (4)$$

On ramènera le système de ces quatre équations au système des deux suivantes :

$$P=\frac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$P^2B(A-aB)^2=2A^2Pp(B+aA)\sqrt{1+a^2}-A^2Bp^2(1+a^2),$$

qui serviront à déterminer A et B.

392. Supposant le problème résolu, joignez les points donnés A et B par la droite AB, qui rencontre en O la droite donnée RR′ (fig. 37). Soit XY la corde donnée : on aura, en désignant par $2l$ cette longueur,

$$OY-OX=2l, \qquad OA.OB=OX.OY;$$

d'où l'on tire, en éliminant OY,

$$OX=-l\pm\sqrt{l^2+OA.OB}.$$

Cette double valeur se construit ainsi qu'il suit :

Par les deux points donnés A et B faire passer un cercle, et mener à ce cercle une tangente par le point O; prendre sur la perpendiculaire, au point de contact T, une longueur $TC=l$; puis du point C comme centre, et d'un rayon égal à CT, décrire un cercle qui coupe OC aux points I et H, qu'on portera par des arcs de cercle sur RR′ en OX et OX′; il ne restera plus qu'à faire passer un cercle par les trois points A, B, X; A, B, X′.

Si la droite RR′ était parallèle à AB, le problème n'offrirait aucune difficulté.

393. Soit x le rayon de la base, y la hauteur, s la surface, v le volume, on aura

$$\pi x^2 y = v, \qquad (1)$$

$$2\pi xy + 2\pi x^2 = s; \qquad (2)$$

d'où l'on tire

$$x^3 - \frac{s}{2\pi}x + \frac{v}{\pi} = 0.$$

Or dans une équation du 3e degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, la limite de l'imaginarité étant

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

on aura la relation nécessaire pour établir le maximum de v,

$$-\left(\frac{s}{6\pi}\right)^3 + \left(\frac{v}{2\pi}\right)^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad v = \frac{2s\sqrt{s}}{6\sqrt{6\pi}}.$$

A cette condition correspondent les deux valeurs égales de x déterminées par la relation générale

$$2px + 3q = 0; \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{\left(\frac{q}{2}\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)};$$

et par conséquent

$$x = \frac{3v}{s} = \sqrt{\frac{s}{6\pi}};$$

d'où l'on conclut

$$y = \frac{6v}{s} = 2\sqrt{\frac{s}{6\pi}},$$

et enfin $\qquad y = 2x.$

Le maximum a donc lieu pour le cylindre circonscriptible à la sphère dans lequel la hauteur est égale au diamètre de la base.

On peut obtenir cette relation de maximum en établis-

sant la condition de tangence des courbes (1) et (2), et posant par conséquent

$$\frac{2y}{x}=\frac{(2x+y)}{x};$$

d'où $$y=2x,$$

$$x=\sqrt{\frac{s}{6\pi}},\qquad y=2\sqrt{\frac{s}{6\pi}},\qquad v=\frac{2s\sqrt{s}}{6\sqrt{6\pi}}.$$

394. Soit RSTU (fig. 38) le rectangle demandé ; en désignant par m^2 la surface donnée, on aura pour équation de condition

$$\frac{\text{RT.US}}{2}\sin\text{SOR}=m^2,$$

car, le triangle devant être circonscrit à l'ellipse, les diagonales forment un système de diamètres conjugués. Or

$$\text{RT}=\text{US}=2\sqrt{\text{A}^2+\text{B}^2}.$$

Donc $$\frac{4(\text{A}^2+\text{B}^2)}{2}\sin\text{SOR}=m^2;$$

d'où $$\sin\text{SOR}=\frac{m^2}{2(\text{A}^2+\text{B}^2)}.$$

Le problème revient donc à déterminer un système de diamètres conjugués dont l'angle est connu et pourra être déterminé de la manière suivante (fig. 39) :

Sur la demi-circonférence EK telle que EF=TR prendre EK=m ; abaisser la perpendiculaire KL, et l'on aura

$$\frac{\overline{\text{EK}}^2}{\overline{\text{TR}}^2}=\frac{\text{EL}}{\text{EF}};\quad\text{d'où}\quad\sin\text{SOR}=\frac{\text{EL}}{\text{EF}}.$$

Porter EL en EI ; joindre IF ; et l'on aura, dans le triangle EIF,

$$\text{IE}=\text{EF}\cos\text{IEF}=\text{EF}\sin\text{IFE};\ \text{donc}\ \text{SOR}=\text{IFE}\ \text{ou}\ 200^\circ-\text{IFE}.$$

Pour construire un système de diamètres conjugués faisant

un angle donné, sur un diamètre quelconque de l'ellipse DD' (fig. 40) décrire un segment capable de l'angle donné, et par le point de rencontre M de l'arc du segment et de l'ellipse mener les cordes supplémentaires MD, MD'; enfin, par le centre O, les diamètres OX', OY', parallèles aux cordes.

Le problème a deux solutions, car l'on peut faire une construction analogue pour le point M'.

Il y a donc deux positions déterminées du système de diamètres conjugués, et par conséquent aussi le problème proposé a deux solutions.

2° La surface du rectangle circonscrit sera la plus grande lorsque SOR=100°, et sin SOR=1. Cette surface est exprimée par $2(A^2+B^2)$; et le rectangle minimum correspond à la limite inférieure des angles supplémentaires, dont la tangente est, comme on sait, $\frac{2AB}{A^2-B^2}$. Dans ce cas particulier

$$\sin SOR = \frac{\tang SOR}{\sqrt{1+\tang^2 SOR}} = \frac{2BA}{A^2+B^2};$$

et pour la surface du rectangle on aurait

$$\frac{4(A^2+B^2)\frac{2AB}{A^2+B^2}}{2} = 4AB,$$

le rectangle construit sur les axes.

395. De quelque manière que ces courbes soient situées dans le plan, on peut toujours construire une troisième courbe concentrique à la première, et égale ou semblable et semblablement située par rapport à la seconde. Les deux courbes concentriques se coupent en quatre points, qui déterminent un parallélogramme, et les droites menées par le centre parallèlement aux côtés du parallélogramme forment un système de diamètres conjugués commun aux courbes concentriques, et par conséquent aux deux courbes proposées.

Cela posé les équations des courbes seront de la forme

$$A^2q^2+B^2p^2=A^2B^2, \qquad (1)$$

$$A'^2(y-b)^2+B'^2(x-a)^2=A'^2B'^2. \qquad (2)$$

Or la tangente en un point quelconque de la courbe (1) sera

$$A^2qy+B^2px=A^2B^2;$$

d'où

$$y=-\frac{B^2p}{A^2q}x+\frac{B^2}{q}. \qquad (3)$$

En désignant par α, β, les coordonnées d'un des points de rencontre des tangentes, l'équation de la polaire de ce point sera

$$A'^2(b-\beta)(y-b)+B'^2(a-\alpha)(x-a)=A'^2B'^2;$$

d'où

$$y=-\frac{B'^2(a-\alpha)}{A'^2(b-\beta)}x+\frac{A'^2B'^2+A'^2b(b-\beta)+B'^2a(a-\alpha)}{A'^2(b-\beta)}. \qquad (4)$$

Egalant les coefficients des équations (3) et (4), on aura

$$\frac{B^2p}{A^2q}=\frac{B'^2(a-\alpha)}{A'^2(b-\beta)}, \qquad (5)$$

$$\frac{B^2}{q}=\frac{A'^2B'^2+A'^2b(b-\beta)+B'^2a(a-\alpha)}{A'^2(b-\beta)}; \qquad (6)$$

d'où l'on tire par une élimination facile

$$q=\frac{A'^2B^2(b-\beta)}{A'^2B'^2+A'^2b(b+\beta)-B'^2a(a-\alpha)},$$

$$p=\frac{A^2B'^2(a-\alpha)}{A'^2B'^2+A'^2b(b-\beta)+B'^2a(a-\alpha)}.$$

Et, substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra, toute réduction faite, l'équation du lieu géométrique de-

mandé

$$A'^4B^2(b-\beta)^2+A^2B'^4(a-\alpha)^2=[A'^2B'^2+A'^2b(b-\beta)+B'^2a(a-\alpha)]^2A^2B^2,$$

équation du 2e degré.

Le lieu géométrique est donc une courbe du 2e degré.

396. *Première solution.* — Si l'on prend le sommet donné A pour origine des axes rectangulaires, et l'axe des abscisses passant par le point donné M, l'équation d'une parabole quelconque sera de la forme

$$\left(y+\frac{Bx}{2}\right)^2+Dy+Ex=0. \qquad \text{(P)}$$

De plus, si l'on désigne par a l'abscisse du point M, on aura pour première relation entre les coefficients B, D, E,

$$\frac{B^2}{4}a+E=0\,; \qquad (1)$$

et il restera encore à exprimer que le sommet de la parabole est à l'origine.

Pour cela il faut et il suffit qu'en changeant convenablement la direction des axes coordonnés, l'équation résultante puisse être ramenée à la forme $y'^2=2px'$.

Substituant dans l'équation générale les formules de transformation

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \qquad \text{(A)}$$

on obtiendra, toute réduction faite,

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\alpha-\frac{B}{2}\sin\alpha)^2y'^2+2(\sin\alpha+\frac{B}{2}\cos\alpha)(\cos\alpha-\frac{B}{2}\sin\alpha)x'y'\\ +(\sin\alpha+\frac{B}{2}\cos\alpha)^2x'^2+(D\cos\alpha-E\sin\alpha)y'+(D\sin\alpha-E\cos\alpha)x'\end{array}\right\}=0;$$

et par conséquent on aura les relations

$$(\sin\alpha+\frac{B}{2}\cos\alpha)(\cos\alpha-\frac{B}{2}\sin\alpha)=0, \qquad (2)$$

$$\sin\alpha + \frac{B}{2}\cos\alpha) = 0, \qquad (3)$$

$$(D\sin\alpha - E\cos\alpha) = 0. \qquad (4)$$

Les équations (1) et (3) rentrent l'une dans l'autre; au surplus il est facile de se convaincre que l'équation (2) donne la valeur de $\tan 2\alpha$ que l'on tirerait de la valeur de $\tan\alpha$ fournie par l'équation (3).

Cela posé, l'équation transformée prend la forme

$$y'^2 = -\frac{D\sin\alpha + E\cos\alpha}{(\cos\alpha - \frac{B}{2}\sin\alpha)^2}\, x'.$$

Or, sous cette forme la parabole a pour foyers le point dont les coordonnées sont

$$y' = 0, \qquad x' = -\frac{1}{4}\frac{(D\sin\alpha + E\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \frac{B}{2}\sin\alpha)^2}.$$

Mais des équations (A) on tire sans difficulté

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

et par conséquent les équations précédentes deviennent

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = 0, \qquad (5)$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{1}{4}\frac{(D\sin\alpha + E\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \frac{B}{2}\sin\alpha)}. \qquad (6)$$

Eliminant B, D, E et α entre les équations (1), (3), (4), (5) et (6), l'équation finale en x et y représentera le lieu géométrique demandé.

De l'équation (5) on tirera

$$\tan\alpha = -\frac{y}{x}; \text{ d'où } \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

et les équations (1), (3), (4) et (6), se réduiront à

$$\frac{B}{2}=-\frac{y}{x},\quad D-E\frac{y}{x}=0,$$

$$\frac{y^2}{x^2}a+E=0,\ (x-\frac{B}{2}y)^2+\frac{1}{4}(Dy+Ex)=0.$$

Substituant enfin, dans la dernière équation, les valeurs de B, D et E, tirées des trois premières, on obtiendra, après réduction

$$y^2=\frac{x^3}{\frac{a}{4}-x},$$

équation d'une cissoïde dont le sommet est à l'origine et qui a pour diamètre du cercle générateur $\frac{1}{4}a$.

Deuxième solution. — On peut arriver plus promptement au résultat par les considérations suivantes :

L'équation (P), résolue par rapport à y, donne

$$y=-\frac{B}{2}x-\frac{D}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2BD-4E)x+D^2};$$

d'où l'on voit que l'axe de la parabole a pour équation

$$y=-\frac{B}{2}x;\qquad (1)$$

et, si x et y désignent les coordonnées du foyer, l'équation (1) sera une première relation entre les coordonnées d'un des points cherchés.

On trouvera facilement que la directrice, qui doit passer par le point dont les coordonnées sont $-x, -y$, et qui est perpendiculaire à l'axe, a pour équation

$$y_1+y=\frac{2}{B}(x_1-x);$$

et, par suite, la distance du point M $(a, 0)$ à la directrice aura pour expression, d'après la formule connue,

$$\frac{y-\frac{2}{B}(a+x)}{\sqrt{1+\frac{4}{B^2}}};$$

et comme cette distance doit être égale à

$$MF = \sqrt{(a-x)^2+y^2},$$

on aura pour deuxième relation

$$\frac{y-\frac{2}{B}(a+x)}{\sqrt{1+\frac{4}{B^2}}} = \sqrt{(a-x)^2+y^2}. \qquad (2)$$

Eliminant $\frac{2}{B}$ entre les équations (1) et (2), on obtiendra, toute réduction faite, la même équation finale

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{a}{4}-x}.$$

397. F et F′ étant les foyers et TT′ la tangente donnés, prenez le milieu O de FF′, et abaissez les perpendiculaires FP, F′P′, sur la tangente. O sera le centre de l'ellipse; OP=OP′ le demi-grand axe, et $\sqrt{FP.FP'}$ le demi petit axe, qu'on peut aussi construire directement après avoir déterminé le demi-grand axe.

Démontrer les deux propriétés qui ont servi à cette construction.

404. Désignons par O le centre du cercle, par PQ=l la longueur de la corde, et par M un point marqué sur cette corde tel que

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

D'après la propriété des cordes dans le cercle on aura, en désignant par r le rayon,

$$PM.MQ = r^2 - \overline{OM}^2, \qquad (2)$$

et, d'après l'énoncé,

$$PM+MQ = l. \qquad (3)$$

Des équations (1) et (3) on tire

$$PM=\frac{m}{m+n}l,\quad MQ=\frac{n}{m+n}l;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtiendra

$$\overline{OM}^2=r^2-\frac{mnl^2}{(m+n)^2},$$

équation d'un cercle concentrique, que l'on construira sans difficulté.

405. Soit $y=2px$ l'équation de la parabole rapportée à son axe, l'origine étant au sommet de la courbe. Pour un point M (fig. 41) quelconque situé entre le sommet et la corde perpendiculaire à l'axe, dont l'équation est $x=d$, on a

$$FM=x+\frac{1}{2}p,\quad MP=d-x;\quad \text{d'où}\quad FM+MP=d+\frac{1}{2}p.$$

Pour un autre point quelconque M′ situé au delà de la corde perpendiculaire on a

$$FM'=x'+\frac{1}{2}p,\quad M'P'=x'-d;\quad \text{d'où}\quad FM'-M'P'=d+\frac{1}{2}p.$$

La constante $d+\frac{1}{2}p=AH+AF=HD$, DD′ étant la directrice, et par conséquent encore $=FL$, d'après la propriété fondamentale de la parabole.

Au reste cette propriété remarquable n'est qu'une conséquence de la propriété fondamentale de la courbe.

En effet, de ce que $MF=MQ$, on a

$$MF+MP=MQ+MP=PQ=HD,$$

et $$M'F-M'P'=M'Q'-M'P'=P'Q'=HD.$$

On peut donc facilement résoudre le problème suivant :

Déterminer le lieu géométrique des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun d'eux à un

point et à une droite donnés soit égale à une longueur donnée.

F et HL étant le point et la droite donnés, mener DD′ parallèle à HL et distante de cette droite de la longueur donnée : cette droite sera la directrice de la parabole, lieu géométrique demandé. Connaissant la directrice DD′ et le foyer F, on déterminera sans peine la direction de l'axe DFH, et le sommet A, milieu de FD.

406. Soit

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes ;

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2 \qquad (2)$$

celle d'une tangente à la courbe en un point x', y' ;

et enfin

$$y=\frac{a^2y'}{b^2x'}x \qquad (3)$$

l'équation de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente.

L'élimination de x', y', entre ces trois équations, donnera l'équation du lieu géométrique cherché.

Les deux dernières équations donnent

$$x'=\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \quad y'=\frac{b^2y}{x^2+y^2}.$$

Et substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve, toute réduction faite,

$$(x^2+y^2)^2=b^2y^2+a^2x^2, \qquad (F)$$

équation du 4ᵉ degré.

Si l'on résoud cette équation bi-carrée par la méthode connue, on trouvera la valeur

$$y=\pm\sqrt{\frac{b^4-2x^4}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^4+4c^4x^2}},$$

dans laquelle $c^2=a^2-b^2$.

En donnant à x des valeurs arbitraires, on déterminera les valeurs correspondantes de y, et l'on construira les quatre branches de la courbe.

Cette construction se fait plus facilement si l'on passe aux coordonnées polaires, en remplaçant x et y par leurs valeurs,

$$x=\rho\cos\omega, \qquad y=\rho\sin\omega.$$

On trouve en effet par cette substitution, après avoir supprimé le facteur ρ^2, commun aux deux membres de l'équation,

$$\rho^2=b^2\sin^2\omega+a^2\cos\omega\ ;$$

d'où

$$\rho=\pm\sqrt{a^2-c^2\sin^2\omega},$$

dans laquelle il suffit de faire varier ω pour trouver autant de points qu'on voudra de la courbe demandée.

414. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes: les côtés du carré inscrit devant être parallèles aux axes, on aura

$$y=x, \qquad (2)$$

et l'intersection de la droite (2) et de la courbe (1) déterminera deux des sommets du carré.

On pourra déterminer le carré graphiquement sans construire la courbe.

Au surplus le sommet positif du carré a pour coordonnées

$$y=x=\frac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

et par conséquent le côté du carré aura pour expression

$$c=\frac{2AB}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

415. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes : un des côtés du carré tangent à la courbe aura pour équation

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2, \qquad (2)$$

et, d'après l'énoncé du problème, on devra avoir

$$x_0=y_0, \text{ ou } \frac{A^2}{x'}=\frac{B^2}{y'}; \text{ d'où } y'=\frac{B^2}{A^2}x'. \qquad (3)$$

L'intersection de la droite (3) et de l'ellipse proposée déterminera les points de contact des côtés du carré circonscrit.

Joignez les extrémités des deux axes par une droite, et par le centre abaissez sur cette droite une perpendiculaire, qui déterminera sur elle deux segments dont le rapport sera égal à $\frac{B^2}{A^2}$.

La droite (3) sera donc facilement déterminée. Les points de direction de l'ellipse et de la droite peuvent s'obtenir au moyen de la règle et du compas.

Au surplus, on peut déterminer les points de contact à l'aide des équations

$$y'=\frac{B^2}{A^2}x', \qquad A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2,$$

qui donnent

$$x'=\pm\frac{A^2}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad y'=\pm\frac{B^2}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

et, si l'on désigne par O le centre de l'ellipse, par A et B les extrémités des axes, on aura

$$x'=\pm A\cos OAB, \qquad y'=\pm B\sin OAB.$$

De là une seconde manière de construire les points de contact du carré circonscrit.

Enfin le côté du carré circonscrit étant représenté par C,

on aura

$$C^2 = x_0^{\,2} + y_0^{\,2} = \frac{A^4}{x'^2} + \frac{B^4}{y'^2} = 2(A^2+B^2),$$

et

$$C = \sqrt{2(A^2+B^2)}.$$

416. Ce problème, qui se présente fréquemment dans la discussion des équations du 2e degré représentant des hyperboles, peut se résoudre de la manière suivante :

Première manière. — Soit p, q, les coordonnées du point donné, rapportées au centre et aux diamètres donnés, et 2A la longueur du diamètre transverse : on aura pour déterminer la longueur du diamètre conjugué 2B l'équation

$$A^2q^2 - B^2p^2 = -A^2B^2,$$

d'où

$$B = \frac{Aq}{\sqrt{p^2 - A^2}}.$$

Connaissant un système de diamètres conjugués de grandeur et de position, la courbe sera facilement construite.

Deuxième manière. — On peut déterminer directement et par une construction graphique les asymptotes de l'hyperbole. En effet

Soit OA et OB (fig. 42) les directions données des deux diamètres conjugués dont OA seul est donné de grandeur. En supposant le problème résolu, soit OS, OS′, les asymptotes cherchées ; par le point A menons, parallèlement à OB, MAN qui sera une tangente à l'hyperbole, et par conséquent on aura AM=AN.

Soit P le point donné ; si par ce point on mène QPAR et sa parallèle MH, et par le point O la droite OI, qui joint le centre au milieu de la corde AP, le point K sera le milieu de MH, comme R le milieu de NH, et par conséquent

AK sera parallèle à ORS′ et KR à MN, et l'on aura les proportions

$$\frac{IA}{IK}=\frac{IR}{IO}, \quad \frac{IA}{IR}=\frac{IL}{IK};$$

d'où

$$\frac{\overline{IA}^2}{\overline{IR}^2}=\frac{IL}{IO}, \quad \text{et enfin} \quad \frac{IA}{IR}=\frac{\sqrt{IL.IO}}{IO};$$

ce qui déterminera le point R, et par conséquent l'asymptote ORS′, et ensuite, à cause de AR=PQ, l'asymptote OSQ.

Cette construction se fait très simplement, ainsi qu'il suit:

Joindre AP indéfiniment, et mener MAN parallèle à OB, puis OI, qui divise AP en deux parties égales et rencontre MAN en L; sur OI, comme diamètre, décrire une demi-circonférence, élever LG perpendiculaire à OI et rabattre IG en IK; joindre le point K au point A, et mener ORS′ parallèle à KA; prendre enfin PQ=AR, et les asymptotes seront ORS′, OSQ.

417. Soit

$$yy'=p(x+x') \qquad (1)$$

l'équation de la tangente au point x', y', de la parabole dont l'équation rapportée à son axe et à son sommet est

$$y'^2=2px'; \qquad (2)$$

faisant successivement $x=0$, $y=0$ dans l'équation (1), on trouve

$$y_0=\frac{px'}{y'}, \quad x_0=-x',$$

et par conséquent le rectangle sera exprimé par

$$R=\sqrt{4x'^2+y'^2}\times\sqrt{\left(\frac{px'}{y'}+y'\right)^2-x'^2};$$

et, après des transformations faciles tirées de l'équation (2)

$$R=2x'\left(x'+\frac{p}{2}\right),$$

ce qui démontre le théorème.

On peut parvenir au même résultat en observant que la perpendiculaire élevée sur l'axe par le sommet de la parabole rencontre la tangente au milieu de la partie comprise entre l'axe et la courbe; et cette partie ayant pour expression $\sqrt{4x'^2+y'^2}$, on aura pour exprimer le rectangle proposé

$$R=\frac{1}{2}(4x'^2+y'^2),$$

et, à cause de $y'^2=2px'$, on retrouvera

$$R=2x'\left(x'+\frac{p}{2}\right).$$

424. Soit R, r et h, les rayons des bases et la hauteur du tronc de cône donné; y la hauteur du plan sécant au dessus de la base inférieure, et x le rayon de la section circulaire.

D'après la formule connue du volume d'un tronc de cône et la condition de l'énoncé, on aura d'abord la relation

$$(\pi R^2+\pi r^2+\pi Rr)h=2(\pi R^2+\pi x^2+\pi Rx)y,$$

qui se réduit à

$$(R^2+r^2+Rr)h=2(R^2+x^2+Rx)y. \qquad (1)$$

Si l'on désigne par H la hauteur totale du cône on aura les relations

$$\frac{H}{R}=\frac{H-y}{x},\quad \frac{H}{R}=\frac{H-h}{r},$$

entre lesquelles éliminant H, on obtiendra

$$\frac{R-x}{R-r}=\frac{y}{h}. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) serviront à déterminer les inconnues

du problème. Substituant dans l'équation (1) la valeur de y tirée de l'équation (2), on aura

$$2(R^3-x^3)=R^3-r^3\,;$$

d'où

$$x=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}},\qquad y=h\left(\frac{R-\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}}{R-r}\right),$$

425. Soit F et F′ (fig. 43) deux foyers des courbes données, ID, ID′, les directrices correspondantes, et M un des points communs de ces deux courbes, d'où l'on a abaissé les perpendiculaires MP, MP′, sur les directrices : d'après la propriété connue des courbes du 2ᵉ degré, on aura

$$\frac{MF}{MP}=r,\quad \frac{MF'}{MP'}=r',\qquad (1)\ (2)$$

r et r' étant $<$ ou $>$ ou $=1$, selon que les courbes données seront des ellipses ou des hyperboles, ou des paraboles.

Dans le cas le plus général, la détermination des points d'intersection des deux courbes par la règle et le compas n'est pas possible. Le problème analytiquement résolu conduit à une équation du 4ᵉ degré.

Mais si l'on établit certaine relation de position entre les foyers et les directrices, le problème peut être résolu par la géométrie élémentaire, ainsi qu'on peut le voir dans les questions suivantes :

Déterminer les points d'intersection de deux courbes du second degré ayant un même foyer.

Dans ce cas particulier, à cause de MF=MF′, on a

$$\frac{MP'}{MP}=\frac{r'}{r}\,.\qquad (G)$$

Le lieu géométrique des points M est par conséquent le

système de deux droites passant par le point de concours I des directrices.

Le problème est donc ramené à construire les points d'intersection de ces droites avec l'une ou l'autre des courbes proposées, construction qui peut se faire au moyen de la règle et du compas.

Déterminer les points d'intersection de deux courbes du second degré semblables et semblablement placées.

D'après cet énoncé on a (fig. 44)

$$\frac{MF}{MP}=\frac{MF'}{MP'}=r, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{MF}{MF'}=\frac{MP}{MP'};$$

et par conséquent

$$\frac{MF}{MF+MF'}=\frac{MP}{MP+MP'},$$

d'où

$$MF+MF'=\frac{MF}{MP}(MP+MP')=r(MP+MP').$$

Mais puisque les courbes sont semblablement situées, les directrices sont parallèles, et, en désignant par d leur distance, on a

$$MF+MF'=rd,$$

équation d'une ellipse confocale avec chacune des courbes proposées et dont le grand axe est égal à rd, et par conséquent déterminé.

Le problème est donc ramené au précédent, c'est-à-dire à déterminer les points d'intersection de deux courbes confocales du 2e degré.

Il est évident que la solution de ce problème n'exige pas d'autre instrument que la règle et le compas.

Si les courbes ont la même directrice, on a $MP=MP'$ (fig. 45), et les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{MF}{MF'}=\frac{r}{r'};$$

les points d'intersection se trouvent sur la courbe donnée, pour laquelle on a

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MF'}}=r, \quad \text{et sur le cercle } \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MF'}}=\frac{r}{r'}.$$

L'intersection de ces deux courbes ne peut être obtenue par la règle et par le compas que dans certains cas particuliers, par exemple lorsque le cercle a son centre au foyer de la courbe du 2e degré.

En effet on a dans ce cas, R étant le rayon du cercle,

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}}=r, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{\mathrm{MF}}^2}{\overline{\mathrm{MP}}^2}=r^2, \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{MF}}^2=\mathrm{R}^2;$$

d'où $\overline{\mathrm{MP}}^2=\frac{\mathrm{R}^2}{r^2}$, et $\mathrm{MP}=\pm\frac{\mathrm{R}}{r}$;

et le problème est ramené à déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une courbe du 2e degré.

426. Soit

$$\mathrm{A}^2y^2+\mathrm{B}^2x^2=\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes,

$$\mathrm{A}^2yy'+\mathrm{B}^2xx'=\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 \tag{2}$$

l'équation de la tangente en un point quelconque x', y', pour lequel on a la relation

$$\mathrm{A}^2y'^2+\mathrm{B}^2x'^2=\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2. \tag{3}$$

Si l'on fait successivement $y=0$, $x=0$, dans l'équation (2), on trouve $x_0=\frac{\mathrm{A}^2}{x'}$, $y_0=\frac{\mathrm{B}^2}{y'}$, pour l'abscisse et l'ordonnée des points où la tangente rencontre les axes, de sorte que le rectangle demandé sera exprimé par

$$\mathrm{P}=\sqrt{(x_0-x')^2+y'^2}\times\sqrt{(y_0-y')^2+x'^2},$$

ou, remplaçant x_0 et y_0 par leurs valeurs,

$$\mathrm{P}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}^2-x'^2}{x'}\right)^2+y'^2}\times\sqrt{\left(\frac{\mathrm{B}^2-y'^2}{y'}\right)^2+x'^2}.$$

Substituant dans cette expression les valeurs de y', y'^2, et $B^2-y'^2$, tirées de l'équation (3), en ayant égard à la relation $c^2=A^2-B^2$, on obtient, toute réduction faite,

$$P=\left(A+\frac{cx'}{A}\right)\left(A-\frac{cx'}{A}\right);$$

d'où l'on conclut que le rectangle des parties de la tangente comprises entre le point de contact et les axes de l'ellipse est équivalent au rectangle des rayons vecteurs menés des foyers au point de contact.

Remarque. Si sur la partie de la tangente comprise entre les axes, comme diamètre, on décrit une circonférence, qui passera nécessairement par le centre de l'ellipse, l'ordonnée de ce cercle correspondant au point de contact sera une moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs.

427. En effet, soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes,

$$y=ax \qquad (2)$$

l'équation d'un diamètre tel que OD (fig. 46) : on trouvera facilement, par l'élimination entre les équations (1) et (2),

$$x=\pm\frac{AB}{\sqrt{A^2a^2+B^2}}, \qquad y=\pm\frac{ABa}{\sqrt{A^2a^2+B^2}};$$

élevant au carré, ajoutant, et remarquant que $x^2+y^2=\overline{OD}^2$, il vient

$$\frac{1}{\overline{OD}^2}=\frac{A^2a^2+B^2}{A^2B^2(1+a^2)}. \qquad (A)$$

Pour un autre diamètre tel que OE, $y=a'x$, on trouverait de même

$$\frac{1}{\overline{OE}^2}=\frac{A^2a'^2+B^2}{A^2B^2(1+a'^2)};$$

et si l'on suppose ces diamètres perpendiculaires l'un à l'autre, à cause de la relation $1+aa'=0$, d'où $a'^2=\frac{1}{a^2}$, on aura

$$\frac{1}{\overline{OE}^2}=\frac{A^2+B^2a^2}{A^2B^2(1+a^2)}; \qquad (B)$$

ajoutant les deux expressions (A) et (B), et réduisant, on trouve

$$\frac{1}{\overline{OD}^2}+\frac{1}{\overline{OE}^2}=\frac{A^2+B^2}{A^2B^2}=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2},$$

résultat indépendant de la quantité a. C. Q. F. D.

433. Soit S (fig. 47) le sommet par lequel doivent passer les trois plans sécants. Chercher le centre de gravité G de la face opposée ABC; les trois triangles AGB, BGC, AGC, sont équivalents, et par conséquent les trois plans devront passer suivant la même droite SG, et suivant les arêtes qui concourent au sommet donné.

434. *Premier problème.* — Soit $OP=d$ (fig. 48); puisque $MP=MQ$, on a

$$\overline{OQ}^2+\overline{OP}^2=2\overline{OM}^2+2\overline{MP}^2;$$

et de plus $MN=\frac{1}{2}QR$.

Désignant donc par x, y, les coordonnées du point Q de la courbe, par α, β, celles du point M, on obtiendra

$$x^2+y^2+d^2=2(\alpha^2+\beta^2)+2[(\alpha-d)^2+\beta^2].$$

Or de l'équation de l'ellipse $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, à cause de $y=2\beta$, on tire $4A^2\beta^2+B^2x^2=A^2B^2$; d'où

$$x^2=\frac{A^2B^2-4A^2\beta^2}{B^2};$$

et par conséquent l'équation de condition sera

$$4\beta^2+\frac{A^2B^2-4A^2\beta^2}{B^2}=2(\alpha^2+\beta^2)+2[(\alpha-d)^2+\beta^2].$$

Réduisant, on trouve

$$4A^2\beta^2+4B^2\alpha^2-4B^2\alpha d+2B^2d^2-A^2B^2=0\,;$$

et, complétant les carrés,

$$\frac{\beta^2}{\left(\frac{B^2}{4}\right)}+\frac{\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)^2}{\left(\frac{A^2}{4}\right)}=1,$$

équation d'une ellipse dont les demi-axes sont $\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B$, et dont le centre est au milieu de la distance OP.

Deuxième problème. — On mène MPQ (fig. 49) telle que $MP=PQ$; alors $y=-\beta$, et l'on a $\overline{OQ}^2+\overline{OM}^2=2\overline{OP}^2+2\overline{MP}^2$, ou $(x^2+y^2)+(\alpha^2+\beta^2)=2d^2+[2(\alpha-d)^2+\beta^2]$; à cause de $y^2=\beta^2$, l'équation de la courbe $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ donne

$$x^2=\frac{A^2B^2-A^2\beta^2}{B^2},$$

et par conséquent l'équation de condition devient, toute réduction faite,

$$\frac{\beta^2}{\frac{(A^2-d^2)B^2}{A^2}}+\frac{(\alpha-d)^2}{(A^2-d^2)}=1.$$

Equation d'une ellipse qui a son centre au point P, et pour demi-axes $B\frac{\sqrt{A^2-d^2}}{A}$ et $\sqrt{A^2-d^2}$.

Ces deux ellipses sont semblables à la proposée, puisque le rapport des demi-axes est le même.

435. Du point donné I (fig. 50), comme centre, et d'un rayon égal à IP, distance de ce point à la directrice donnée DD′, décrire une circonférence; mener HH′ parallèle à DD′, à une distance PQ égale à la moitié du paramètre donné : et les points d'intersection F et F′ seront les foyers des deux paraboles qui satisfont à l'énoncé.

Démontrer la propriété sur laquelle est fondée la construction.

436. Soit

$$y^2 = 2px, \quad (1)$$

$$y'^2 = 2p(x' - a), \quad (2)$$

les équations des paraboles; si l'on cherche le rapport des ordonnées des deux courbes correspondantes à la même abscisse on aura

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x-a} = \frac{1}{1-\frac{a}{x}},$$

et, faisant $x=\infty$, on en conclut $y^2=y'^2$, ou $y=y'$.

On arrive au même résultat en cherchant la différence entre les ordonnées correspondantes à la même abscisse. En effet on a

$$y = \sqrt{2px}, \qquad y' = \sqrt{2p(x-a)};$$

d'où

$$y - y' = \frac{a\sqrt{2p}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}},$$

et si l'on fait $x=\infty$, on a $y-y'=0$; d'où $y=y'$.

En prenant la différence entre les carrés des ordonnées correspondantes à la même abscisse, on a

$$y^2 - y'^2 = 2pa,$$

quantité constante, quel que soit x.

Or, $y^2-y'^2=(y+y')(y-y')=(\text{PM}+\text{P}m)(\text{PM}-\text{P}m)=(\text{PM}+\text{P}n)(\text{PM}-\text{P}m)$ ou $\text{M}n.\text{M}m.=2pa$.

D'où l'on conclut les théorèmes suivants :

Etant donné deux paraboles égales et dirigées suivant le même axe et dans le même sens, si de tous les points de la parabole extérieure on mène à la parabole intérieure des

sécantes perpendiculaires à l'axe, le produit de la sécante entière par la partie extérieure sera constant et égal au carré construit sur sa moitié de la tangente perpendiculaire à l'axe au sommet de la parabole intérieure.

Etant donné deux paraboles égales dirigées suivant le même axe et dans le même sens, si l'on coupe ces deux courbes par des droites parallèles à l'axe, et qu'on mène les tangentes à l'extrémité de ces nouveaux diamètres, ces tangentes seront deux à deux parallèles entre elles.

En effet β représentant la distance d'un diamètre quelconque par rapport à l'axe, la tangente à l'extrémité de ce diamètre fera avec l'axe un angle dont la tangente sera exprimée par $\frac{p}{\beta}$, pour l'une comme pour l'autre des deux courbes.

De plus si l'on désigne par x et x' les abscisses des points d'intersection de la sécante parallèle à l'axe, dont l'équation est $y=\beta$, avec les paraboles proposées, on aura

$$x=\frac{\beta^2}{2p},\quad x'-a=\frac{\beta^2}{2p}\quad \text{d'où}\quad x'-x=a;$$

c'est-à-dire que OQ=O'Q' et QQ'=OO'. D'où il suit que le paramètre de chacun des diamètres sera encore égal; et par conséquent les équations des paraboles ne changent pas de forme, quel que soit le diamètre commun auquel elles sont rapportées.

La propriété précédente est donc vraie encore quelle que soit la direction des sécantes, pourvu qu'elles soient toutes parallèles entre elles.

437. Soit A, B, C (fig. 52), les trois points donnés, et MN la direction de l'axe de la parabole; par l'un des points donnés, B par exemple, mener BH parallèle à MN, joindre AC; et par I, milieu de AC, mener IK parallèle à MN. Si l'on désigne par $2p$ le paramètre inconnu du diamètre con-

jugué à la corde AC, on aura, d'après une propriété connue (455),

$$2p.\text{BD}=\text{DA.DC}; \quad \text{d'où} \quad 2p=\frac{\text{DA.DC}}{\text{BD}}.$$

Si l'on exprime en outre par x l'abscisse du point I, c'est-à-dire la distance du point I à l'extrémité du diamètre IK, on aura $\text{AI}^2=2px$; d'où x sera déterminé.

Construction. Par les trois points donnés A, B, C, faire passer un cercle, qui coupera BH en un point H tel que

$$\text{DH}=\frac{\text{DA.DC}}{\text{BD}}=2p;$$

porter DH en IK; sur IK décrire une demi-circonférence, et prendre $\text{IA}'=\text{IA}$: la perpendiculaire A′P abaissée sur IK déterminera l'abscisse IO=IP, et la parabole sera facilement construite.

445. Soit $A^2y^2-B^2x^2=-A^2B^2$ l'équation de l'hyperbole rapportée à son centre et à ses axes; $A^2yy'-B^2xx'=-A^2B^2$ l'équation de la tangente en un point quelconque x', y';

$$\alpha=x' \quad \text{et} \quad \beta=-\frac{A^2y'}{B^2x'}\alpha \qquad (1)\,(2)$$

les équations de la perpendiculaire menée du centre à la tangente, et de l'ordonnée du point de contact;

$$A^2y'^2-B^2x'^2=-A^2B^2 \qquad (3)$$

la relation entre les coordonnées du point x', y', de la courbe et les axes de l'hyperbole.

Eliminant x', y', entre les équations (1), (2), (3), on obtiendra l'équation du lieu géométrique demandé.

A cause de l'équation (2) l'équation (1) donne la valeur de y', et substituant dans l'équation (3) on obtiendra

$$B^2\beta^2-A^2\alpha^2=-A^4, \qquad (F)$$

équation d'une hyperbole concentrique à la proposée et dont les demi-axes sont

$$\beta_0 = \frac{A^2}{B}, \quad \alpha_0 = A,$$

c'est-à-dire ayant même axe transverse que la proposée, et pour second axe une troisième proportionnelle aux deux axes de cette même hyperbole.

446. Soit SS' (fig. 53), et A, B, C, l'asymptote et les trois points donnés; mener ABM et prendre AM' = BM; mener pareillement BCN, et prendre BN' = CN : les deux points M' et N' sont à la seconde asymptote RR', qui est par conséquent déterminée. Par le point O, intersection des asymptotes SS', RR', mener OD, qui partage l'angle SOR en deux parties égales, OD est la direction de l'axe transverse; pour déterminer sa grandeur, mener AGH parallèle à OD, et chercher une moyenne proportionnelle à AG et AH; cette moyenne proportionnelle AK est le demi-axe transverse.

On trouvera facilement le demi-axe non transverse, et la courbe sera complétement déterminée.

Démontrer les propriétés sur lesquelles ces constructions sont fondées.

447. Soit F et M le foyer et le point commun. Du point M comme centre, et d'un rayon égal à MF, si l'on décrit une circonférence, toute droite tangente à cette circonférence pourra être considérée comme la directrice d'une des paraboles qui répondent à l'énoncé. Soit donc DP une de ces tangentes; des points F et M abaissons sur la directrice les perpendiculaires FD et MP : le point A, milieu de FD, sera le sommet d'une parabole du problème. Si l'on joint MD, MA, le triangle MDF et le triangle rectangle MDP donneront $2\overline{MA}^2 + 2\overline{FA}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MF}^2$, $\overline{MD}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{PD}^2$.

Observant que $\overline{PD}^2 = \overline{MF}^2 - (MP - DF)^2$, on trouvera

$$\overline{MA}^2 + 3\overline{FA}^2 - 2MF.FA - \overline{MF}^2 = 0.$$

Si donc on prend le point M pour l'origine des coordonnées rectangulaires, MF étant l'axe des abscisses, et si l'on fait $MF=d$, l'équation du lieu géométrique, dans lequel x et y représentent les coordonnées du point A, sera

$$x^2+y^2+3[(x-d)^2+y^2]-2d\sqrt{(x-d)^2+y^2}-d^2=0, \qquad (F)$$

équation du 4e degré.

455. Soit I (fig. 54) le point donné, IAA′ et IGH une sécante quelconque et une droite parallèle à l'axe de la parabole; soit $2p$ le paramètre du diamètre OMK conjugué à la corde AA′: on aura les relations

$$\overline{AM}^2=2p.OM, \qquad \overline{GF}^2=2p.OF;$$

d'où

$$\frac{\overline{FG}^2-\overline{AM}^2}{\overline{AM}^2}=\frac{OF-OM}{OM}.$$

A cause de

$$\overline{GF}^2-\overline{AM}^2=\overline{IM}^2-\overline{AM}^2=IA.IA', \quad \text{et} \quad OF-OM=IG,$$

on aura

$$\frac{IA.IA'}{\overline{AM}^2}=\frac{IG}{OM}; \quad \text{d'où} \quad IA.IA'=2p.IG.$$

Si le point était intérieur, on parviendrait à un résultat analogue

456. A, B, et HM (fig. 55), étant les points et la tangente donnés, et IA, HB, la direction de l'axe, on déterminera le point de contact par les relations

$$\overline{IM}^2=2pIA, \ \overline{HM}^2=2pHB; \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{IM}^2}{\overline{HM}^2}=\frac{IA}{HB}.$$

Menant AC parallèle à la tangente HM, sur HB décrivant une demi-circonférence, élevant la perpendiculaire CK, et menant HK, on aura

$$\frac{IA}{HB}=\frac{\overline{HK}^2}{\overline{HB}^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{IM}{HM}=\frac{HK}{HB},$$

et le problème revient à déterminer sur la droite HI donnée un point M tel que $\frac{HM}{IM}$ soit égal à un rapport donné.

Le problème a deux solutions.

457. Mener la normale, et par l'extrémité de cette longueur donnée comme centre, et avec un rayon égal au demi-paramètre, décrire une circonférence; puis, par le point de contact mener une tangente à cette circonférence: l'axe sera déterminé, ainsi que le foyer, qui se trouve au point milieu de la distance des pieds de la tangente et de la normale. — Deux solutions.

Démontrer la propriété de la sous-normale.

460. *Première manière.* — Soit supposé la zone ABCD (fig. 56) partagée en un certain nombre n de zones équivalentes par des plans parallèles aux deux bases et équidistants. Si l'on prend ce nombre n assez grand, on pourra considérer chacune de ces zones comme un cylindre, dont le centre de gravité sera au milieu de la hauteur. Soit donc h la hauteur de chacune de ces petites zones et H la hauteur totale de la zone proposée dans la sphère de rayon R. Il est évident d'abord que, le centre de gravité de chaque petite zone se trouvant sur le rayon OR, perpendiculaire aux deux bases de la zone proposée, le centre de gravité de la zone totale se trouvera sur ce même rayon. Il suffira donc de déterminer sa distance au plan de l'une ou de l'autre des deux bases, de la base inférieure par exemple

Soit x cette distance inconnue : le moment de la zone par rapport au plan de la base inférieure sera $2\pi RHx$, et les zones parallèles auront pour moments

$$2\pi Rh\frac{h}{2}, \qquad 2\pi Rh\frac{3h}{2}\ldots;$$

de sorte que, d'après le théorème des moments, on aura, pour déterminer x, la relation

$$2\pi RHx = 2\pi Rh\frac{h}{2} + 2\pi Rh\frac{3h}{2}\ldots;$$

et enfin, $x=\frac{h^2}{2}\left(\frac{1+3+5+7+\ldots\ldots}{H}\right).$

Or, d'après la formule connue de la somme des termes d'une progression par différence, on a

$$1+3+5+7+\ldots\ldots \text{ (en nombre } n)=n^2;$$

et si on observe que $nh=H$, on aura $x=\frac{H}{2}$.

Le centre de gravité de la zone se trouve donc au milieu de la hauteur.

Deuxième manière. — Mais sans faire aucune hypothèse sur la nature des tranches, soit h la hauteur de chaque tranche, et x la distance du centre de gravité de chacune d'elles à sa base inférieure, H la hauteur totale de la zone et X la distance de son centre de gravité à la base inférieure: on aura, d'après le théorème des moments,

$$2\pi Rhx+2\pi Rh(x+h)+2\pi Rh(x+2h)+\ldots\ldots=2\pi RHX;$$

d'où

$$x+(x+h)+(x+2h)+\ldots\ldots=HX.$$

Le premier membre étant la somme des n termes d'une progression par différence dont le premier est x et la raison h, on aura, d'après la formule connue,

$$[2x+(n-1)h]\frac{n}{2}=HX,$$

et, à cause de $H=nh$,

$$X=\frac{2x-h}{2}+\frac{H}{2}.$$

Or, à mesure que n augmente, $\frac{2x-h}{2}$ diminue de manière à devenir plus petite que toute quantité donnée; donc

$$X=\frac{H}{2}.$$

467. Mener une perpendiculaire à la tangente donnée au point donné, prendre sur cette perpendiculaire une longueur égale à la normale donnée, mener par le point ainsi

déterminé une parallèle à la direction de l'axe, et par le point de contact une perpendiculaire à cette parallèle : la portion de l'axe comprise entre le pied de cette perpendiculaire et la normale est égale au demi-paramètre, et le milieu de la distance entre le pied de la normale et de la tangente sera le foyer.

On déterminera sans difficulté le sommet et la directrice. — Deux solutions.

475. Soit S le sommet donné. Partagez la face opposée en quatre parties équivalentes, en joignant deux à deux les milieux M, N, O, des côtés du triangle, et par les droites SM, SN; SM, SO; SN, SO, faire passer trois plans, qui partageront le tétraèdre donné en quatre parties équivalentes.

476. Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ l'équation de la courbe, que l'on supposera une ellipse, pour fixer les idées; x, y; α, β, les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe et du point P correspondant d'après l'énoncé; on aura les relations

$$\overline{OM}^2=x^2+y^2, \quad \overline{OP}^2=\alpha^2+\beta^2$$

et, d'après la condition du problème,

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{K^2}. \qquad (1)$$

Les valeurs de x et de y seront données par les relations

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2, \quad 1+\frac{y}{x}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=0,$$

puisque les droites OP, OM, doivent être perpendiculaires l'une à l'autre.

On tire facilement de ces équations la valeur de x^2+y^2, qui, substituée dans l'équation (1), donne pour l'équation du lieu géométrique demandé

$$\frac{\beta^2}{\left(\frac{A^2K^2}{A^2-K^2}\right)}+\frac{\alpha^2}{\left(\frac{B^2K^2}{B^2-K^2}\right)}=1. \qquad (F)$$

1° Si l'on suppose $B^2>0$ et $A>B$, l'équation (F) représentera une ellipse tant que $K<B$.

Si $K=B$, le lieu géométrique donne deux droites parallèles au grand axe.

On trouvera facilement que l'équation (F) représente l'ellipse proposée elle-même, lorsque $K^2=\frac{A^2B^2}{A^2+B^2}$.

Si $K>A$, la courbe est imaginaire.

2° Si $B^2<0$, l'équation (F) devient

$$\frac{\beta^2}{\left(\frac{A^2K^2}{A^2-K^2}\right)}+\frac{\alpha^2}{\left(\frac{B^2K^2}{B^2+K^2}\right)}=1,$$

et représente encore une ellipse tant que $K<A$;

Si $K=A$, deux droites parallèles à l'axe non transverse;

Si $K>A$, une hyperbole.

Enfin l'équation (F) ne peut représenter une circonférence que dans le cas où la courbe proposée est elle-même une circonférence.

477. Joindre le point de contact et le foyer; mener par le point de contact une droite faisant avec la tangente le même angle que le rayon vecteur du foyer : la direction de l'axe sera déterminée et la directrice sera perpendiculaire à cette direction et tangente à la circonférence décrite du point de contact comme centre avec un rayon égal à la distance de ce point au foyer. — Deux solutions.

487. Mener la normale TN (fig. 57), et, par le point de contact T, une perpendiculaire TP à la direction donnée de l'axe de la parabole, et une parallèle TD à cette même direction; prendre sur cette dernière droite une longueur TD égale au demi-paramètre donné, et mener par le point D une parallèle à TP, qui rencontre la normale en N; par ce point N menant NP parallèle à la direction de l'axe, NPS

sera l'axe lui-même, et le point A milieu de SP sera le sommet de la parabole.

Deux solutions, correspondantes à deux paraboles symétriques par rapport à la tangente.

On aurait pu aussi déterminer directement le foyer au lieu de déterminer le sommet.

495. Soit CAB le triangle déterminé par le plan qui passe suivant les points de contact de la sphère et du cône.

Soit R le rayon de la sphère, a, b, c et h, les côtés et la hauteur inconnus du triangle : on aura pour exprimer le volume du cône

$$v=\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{h}{3}, \qquad \text{(A)}$$

et la relation connue

$$R=\frac{2\,\text{surf. ABC}}{AB+BC+AC}=\frac{ah}{a+b+c},$$

et, à cause de $c=b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4h^2}$,

$$R=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+4h^2}};$$

d'où on tire la valeur de a^2, qui, substituée dans l'expression (A), donne

$$v=\frac{\pi}{3}\frac{R^2h^2}{(h-2R)}.$$

Développant, et ordonnant par rapport à h, on aura

$$\pi R^2h^2-3vh+6Rv=0;$$

d'où

$$h=\frac{3v}{2\pi R^2}\pm\frac{1}{2\pi R^2}\sqrt{3v(3v-8\pi R^3)}.$$

La valeur minimum de v est donc $v=\frac{8}{3}\pi R^3$. La hauteur du cône circonscrit est par conséquent $h=4R$, et le rayon de

base $\frac{1}{2}a = R\sqrt{2}$. Quant à l'angle du cône, en le désignant par c, on a

$$\tang \frac{1}{2}c = \frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Il est remarquable que ce cône est aussi celui dont la surface totale est un minimum.

En effet, la surface totale sera

$$S = \frac{\pi}{4}(a^2 + 2ab).$$

Substituant les valeurs de a et de b obtenues par les calculs précédents, il vient, toute réduction faite,

$$S = \pi R\left(\frac{h^2}{h - 2R}\right).$$

Résolvant par rapport à h, on obtient

$$h = \frac{S}{2\pi R} \pm \frac{1}{2\pi R}\sqrt{S(S - 8\pi R^2)};$$

d'où

$$S = 8\pi R^2; \text{ et } h = 4R, \frac{a}{2} = \sqrt{2}, b = \frac{3}{2}R\sqrt{2}.$$

497. L'asymptote OIS (fig. 58) et la directrice DI étant données, on connaît la direction de l'axe transverse, qui est perpendiculaire à la directrice, et par conséquent l'angle SIG que l'asymptote fait avec cette direction. On a donc les deux relations

$$A^2 + B^2 = c^2, \qquad \frac{B}{A} = a,$$

en désignant par a la tangente de l'angle SIG; d'où l'on tire

$$A = \frac{c}{\sqrt{1 + a^2}} = c \cos I,$$

en appelant I l'inclinaison de l'asymptote sur l'axe transverse.

Pour construire cette valeur, on portera sur l'asymptote, de I en S, une longueur égale à la distance donnée c du centre au foyer; on abaissera ST perpendiculaire à IG, menée perpendiculairement à ID; IT sera égal à A; enfin portant par un arc de cercle IT de I en O, on aura le centre O, l'axe transverse OD, le foyer F, le demi-axe non transverse FI, etc.

498. Soit

$$y^2 = 2px, \qquad (1)$$

$$y'^2 = 2p(x'-a), \qquad (2)$$

les équations des courbes.

L'équation de la tangente en un point quelconque de la première sera

$$y'y = p(x+x'), \qquad (3)$$

et la corde de contact des tangentes menées à la seconde par le point α, β,

$$\beta y' = p'(x'+\alpha-2a); \qquad (4)$$

ou, en résolvant ces deux équations,

$$y' = \frac{px'}{y} + \frac{px}{y}, \qquad (5)$$

$$y' = \frac{p'x'}{\beta} + \frac{p'}{\beta}(\alpha-2a). \qquad (6)$$

Egalant les constantes de ces équations, pour exprimer que les droites se confondent en une seule et même droite, on obtient

$$\frac{p}{y} = \frac{p'}{\beta}, \qquad (7)$$

$$\frac{px}{y} = \frac{p'}{\beta}(\alpha-2a). \qquad (8)$$

Eliminant x et y entre les équations (1), (7) et (8), on obtiendra

$$\beta^2 = \frac{2p'^2}{p}(\alpha-2a), \qquad (F)$$

équation d'une parabole, dirigée suivant le même axe et dans le même sens, dont le paramètre est une troisième proportionnelle aux paramètres des paraboles proposées, le sommet étant à une distance du sommet, pris pour origine des axes, double de celle qui sépare les sommets des paraboles proposées.

Si les paraboles sont égales, $p=p'$, et la parabole du lieu géométrique devient

$$\beta^2=2p(\alpha-2a).$$

Les trois paraboles sont égales et asymptotes entre elles.

Si $a=0$ et $p'=-p$, on a $\beta^2=2p\alpha$;
d'où l'on conclut ce théorème:

Etant donné deux paraboles égales ayant même axe et même sommet, mais dirigées en sens inverse, si l'on mène à l'une d'elles des tangentes, qui coupent la seconde en deux points, et que par ces deux points on mène les tangentes à la seconde parabole, le lieu d'intersection de ces tangentes sera la première parabole donnée.

504. Le centre de gravité du segment se trouvera nécessairement sur la flèche, car tout plan passant par cette droite partage le segment en deux parties symétriques : il ne restera donc plus qu'à déterminer la distance du centre de gravité au centre de la sphère.

Pour cela on se souviendra 1° que le centre de gravité d'un cône droit se trouve sur l'axe, aux trois quarts de la hauteur à partir du sommet; 2° que le centre de gravité d'une zone sphérique à une ou deux bases est situé au milieu de la flèche ou hauteur; 3° enfin que le centre de gravité d'un secteur sphérique se trouve au milieu de la flèche correspondante à l'arc décrit du centre de la sphère avec un rayon égal aux trois quarts du rayon de la sphère elle-même.

Cela posé, désignons par V_1 le volume du segment sphé-

rique, V celui du secteur correspondant, V′ celui du cône, qui a même base que le segment et pour sommet le centre de la sphère; x_1, x, x', les distances des centres de gravité de ces trois corps au centre de la sphère.

On aura évidemment

$$V = V' + V_1, \qquad (1)$$

et, d'après le théorème des moments,

$$Vx = V'x' + V_1 x_1. \qquad (2)$$

Soit R le rayon de la sphère, r le rayon de la base, f la flèche du segment. On aura pour le cône

$$V' = \frac{\pi r^2 (R-f)}{3}, \qquad x' = \frac{3}{4}(R-f).$$

Le volume du secteur V sera exprimé par

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 f,$$

et son centre de gravité sera éloigné du centre d'une longueur

$$x = \frac{3}{4}\left(R - \frac{f}{2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) et (2), on trouvera d'abord

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 f - \frac{1}{3}\pi r^2 (R-f),$$

et, si l'on remplace r^2 par $f(2R-f)$, on obtiendra

$$V_1 = \pi f^2 \left(R - \frac{1}{3} f\right)^*,$$

---

* On peut déterminer le volume V du segment sphérique à une base, connaissant le volume de la sphère et sachant 1° que l'expression du volume du segment est une fonction rationnelle des puissances entières et positives du rayon R de la sphère et de la flèche f du segment; 2° que les dérivées de cette fonction par rapport à R et à f sont égales pour $f = R$.

En effet, on pourra exprimer le volume du segment par la for-

expression très simple du volume du segment sphérique à une seule base.

L'équation (2) deviendra, par la substitution des valeurs précédentes,

$$x_1[\pi f^2(R-\frac{1}{3}f)]=\frac{\pi}{4}R^2f(2R-f)-\frac{\pi}{4}r^2(R-f)^2,$$

et, à cause de $r^2=f(2R-f)$, il vient, après réductions,

$$x_1=\frac{\left(R-\frac{f}{2}\right)^2}{\left(R-\frac{f}{3}\right)};$$

d'où résulte cet énoncé d'une simplicité assez remarquable:

La distance du centre de gravité d'un segment sphérique à une base au centre de la sphère est égale à une troisième proportionnelle entre l'excès du rayon sur le tiers de la flèche et l'excès du rayon sur la moitié de la flèche du segment.

La distance du centre de gravité du segment au plan tan-

---

mule

$$V=AR^3+A'R^2f+A''Rf^2+A'''f^3.$$

Or, pour $f=0$ on a $V=0$, donc $A=0$; (1)

pour $f=R$ $V=\frac{2}{3}\pi R^3$, et $A+A'+A''+A'''=\frac{2}{3}\pi$; (2)

pour $f=2R$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, et $A+2A'+4A''+8A'''=\frac{4}{3}\pi$; (3)

enfin d'après la dernière condition, $3A+2A'+A''=A'+2A''+3A'''$; (4)

des équations (1), (2), (3) et (4) on tire

$$A=0,\quad A'=0,\quad A''=\pi,\quad A'''=-\frac{1}{3}\pi;$$

d'où

$$V=\pi f^2\left(R-\frac{1}{3}f\right).$$

gent à la sphère, mené parallèlement à la base, sera exprimée par

$$D_1 = R - x_1 = \frac{f\left(\frac{2}{3}R - \frac{f}{4}\right)}{\left(R - \frac{f}{3}\right)},$$

Ce qui fournit un nouvel énoncé moins simple que le précédent.

Enfin si l'on rapporte la distance du centre de gravité à la base du segment on aura, en représentant par D_2 cette distance

$$D_2 = x_1 - (R - f) = \frac{\frac{1}{3}f\left(R - \frac{f}{3}\right)}{\left(R - \frac{f}{4}\right)}.$$

Si le segment sphérique se change en hémisphère, on aura, à cause de $f = R$,

$$x_1 = \frac{3}{8}R, \quad D_1 = \frac{5}{8}R, \quad D_2 = \frac{3}{8} = R.$$

Connaissant le centre de gravité d'un segment sphérique à une base, il sera facile de déterminer le centre de gravité d'un segment sphérique à deux bases. En effet, désignons par S le volume du segment proposé, S_1 et S_2 les volumes des segments sphériques à une seule base dont S est la différence; par x, x_1, x_2, les distances des centres de gravité des trois segments au centre de la sphère; et enfin par h, f_1 et f_2, la hauteur du segment proposé et les flèches des deux autres, on aura pour déterminer la distance du centre de gravité demandé les deux relations

$$S = S_1 - S_2, \qquad (1)$$

$$Sx = S_1x_1 - S_2x_2; \qquad (2)$$

d'où

$$x = \frac{S_1x_1 - S_2x_2}{S_1 - S_2},$$

équation dans laquelle on substituera les valeurs trouvées

précédemment

$$S_1=\pi f_1^2\left(R-\frac{f_1}{3}\right),\qquad S_2=\pi f_2^2\left(R-\frac{f_2}{3}\right),$$

$$x_1=\frac{\left(R-\frac{f_1}{2}\right)^2}{\left(R-\frac{f_1}{3}\right)},\qquad x_2=\frac{\left(R-\frac{f_2}{2}\right)^2}{\left(R-\frac{f_2}{3}\right)};$$

et, dans les réductions, on aura soin de faire $f_1-f_2=h$. Nous laissons au lecteur le soin d'achever le calcul.

507. Soit BCD un triangle rectiligne quelconque; b, c, d, les trois côtés. Prenant pour axe des abscisses le côté CD, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire élevée par le point C; si l'on désigne par h la hauteur du triangle, par a le segment adjacent à l'angle C formé par la hauteur sur le côté b pris pour base; par x_1, y_1; x_2, y_2, les coordonnées des centres des cercles circonscrit et inscrit, et enfin par R et r les rayons de ces cercles, on trouve facilement *

$$x_1=\frac{b}{2},$$

$$y_1=\frac{a^2+h^2-ab}{2h};\qquad R=\frac{\sqrt{a^2+h^2}\,\sqrt{(b-a)^2+h^2}}{2h}.$$

$$x_2=b\,\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{b+\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{(b-a^2)+h^2}},$$

$$y_2=\frac{bh}{b+\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{(b-a)^2+h^2}},$$

$$r=\frac{bh}{b+\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{(b-a)^2+h^2}},$$

Et comme l'on a désigné par b, c, d, les trois côtés du tri-

* Voir les *Problèmes d'application de l'algèbre à la géométrie*, 1re partie, De la ligne droite et du cercle.

angle, ces valeurs prennent la forme plus simple

$$x_1=\frac{b}{2},$$

$$y_1=\frac{c^2-ab}{2h}, \qquad R=\frac{cd}{2h}.$$

$$x_2=\frac{b(a+c)}{b+c+d},$$

$$y_2=\frac{bh}{b+c+d}, \qquad r=\frac{bh}{b+c+d}.$$

Soit représentée par D la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit, on aura

$$D^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2;$$

et, par la substitution des valeurs précédentes,

$$D^2=\left[\frac{b}{2}-\frac{b(a+c)}{b+c+d}\right]^2+\left[\frac{c^2-ab}{2h}-\frac{bh}{b+c+d}\right]^2;$$

développant le second membre et observant que $a^2+h^2=c^2$, $(b-a)^2+h^2=d^2$, et $b^2-2ab=d^2-c^2$, on trouvera pour la valeur de D^2

$$D^2=\frac{c^2d^2}{4h^2}-\frac{bcd}{b+c+d}.$$

Mais, d'après deux formules connues, on a

$$\frac{c^2d^2}{4h^2}=R^2 \quad \text{et} \quad \frac{bcd}{b+c+d}=2Rr,$$

car la surface du triangle peut s'exprimer par

$$S=\frac{bcd}{4R}, \quad S=\frac{bh}{2} \quad \text{et} \quad S=(b+c+d)\frac{r}{2}.$$

Les deux premières valeurs donnent

$$\frac{cd}{2h}=R,$$

et la première et la troisième

$$\frac{bcd}{b+c+d}=2Rr.$$

On aura donc enfin la relation cherchée

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

On peut conclure de cette valeur que le rayon du cercle circonscrit ne peut être moindre que le double du rayon du cercle inscrit, excepté le cas du triangle équilatéral, dans lequel l'un des deux rayons est double de l'autre, et $D=0$.

509. L'équation étant résolue par rapport à y, on commencera par décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs du premier degré en x; ce qui se fait, comme on le sait, en égalant successivement les deux polynomes à zéro et résolvant les deux équations d'après les méthodes connues.

On voit tout d'abord que le numérateur

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Le dénominateur, égalé à zéro,

$$x^3 + 9x - 9 = 0,$$

et comparé à l'équation générale

$$x^2 + px + q = 0,$$

donne la relation $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$: cette équation a par conséquent deux de ses racines imaginaires, et une seule réelle, comprise évidemment entre 0 et 1.

On peut arriver au même résultat en observant que, si l'on représente par α cette racine réelle <1, et que l'on divise $x^3 + 9x - 9$ par $x - \alpha$, on obtient pour quotient $x^2 + \alpha x + \alpha^2 + 9$, qui, égalé à zéro, ne peut donner que des racines imaginaires, puisque $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 < \alpha + 9$.

L'équation proposée prend donc la forme

$$y = \frac{(x-1)^2}{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+9)},$$

et l'on pourra suivre facilement les variations de l'ordonnée correspondantes aux diverses valeurs données à l'abscisse.

Pour $x=0$, on a $y=-\frac{1}{9}$; valeur que l'on portera sur l'axe des ordonnées au-dessous de l'origine.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$, l'ordonnée décroît insensiblement d'abord, puis elle croît rapidement, restant toujours négative; enfin pour $x=\infty$, on a $y=-\infty$, et par conséquent la droite $x=\alpha$ est asymptote à cette branche de la courbe située au-dessous de l'axe des abscisses.

Pour $x>\alpha$, l'ordonnée reste toujours positive; infiniment grande à partir de $x=\alpha$, elle devient nulle pour $x=1$; ce qui donne une nouvelle branche au dessus de l'axe des abscisses, qui a pour asymptote $x=\alpha$ et qui touche l'axe des abscisses au point $x=1$.

En donnant à x des valeurs plus grandes que 1, l'ordonnée reste toujours positive. La courbe se relève donc au dessus des abscisses à partir du point $x=1$, mais elle s'en rapproche bientôt, car pour $x=\infty$, on a $y=0$. En effet, divisant le numérateur par le dénominateur dans l'équation proposée, on obtient

$$y=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\frac{18}{x^4}\dots,$$

où l'on voit qu'en faisant $x=\infty$, on a évidemment $y=0$.

Par conséquent cette branche de courbe a pour asymptote l'axe des abscisses.

Si l'on fait maintenant $x<0$, on a toujours $y<0$; et pour $x=-\infty$, $y=0$: cette branche nouvelle, qui se joint à la première, a donc aussi pour asymptote l'axe des abscisses.

On voit déjà que la courbe proposée se compose de deux grandes branches, qui ont pour asymptotes les droites $x=\alpha$, et l'axe des abscisses, entre lesquelles elles sont renfermées.

Afin de déterminer plus exactement la forme de la courbe, on cherchera l'équation générale de la tangente, qui

sera de la forme (nº 38)

$$y-y'=-\frac{f'(y)}{f'(x)}(x-x'),$$

ou seulement le coefficient de x, qui exprime la tangente de l'angle que la tangente fait avec l'axe des abscisses.

Pour cela l'équation proposée, mise sous la forme

$$(x^3+9x-9)y-(x^2-2x+1)=0,$$

donne

$$f'(x)=(3x^2+9)y-(2x-2),\quad f'(y)=(x^3+9x-9);$$

par conséquent

$$t=-\frac{f'(x)}{f'(y)}=-\frac{(3x^2+9)y+(2x-2)}{(x^3+9x-9)};$$

et, remplaçant y par sa valeur tirée de l'équation proposée, on obtient après réduction,

$$t=-\frac{x^4-4x^3-6x^2+18x-9}{(x^3+9x-9)^2}.$$

Les tangentes perpendiculaires à l'axe des x seront données par $f'(y)=0$ ou $x^3+9x-9=0$; ce qui donne encore l'asymptote $x=\alpha$, limite des tangentes.

Pour avoir les tangentes parallèles à l'axe des x, on posera $f'(x)=0$ ou $x^4-4x^3-6x^2+18x-9=0$, équation qui admet d'abord pour racine $x=1$, laquelle donne $y=0$, et par conséquent l'axe des abscisses. Divisant l'équation précédente par $x-1$, on trouve $x^3-3x^2-9x+9=0$, dont les trois racines sont réelles, et comprises, la première entre 0 et 1, la seconde entre 4 et 5, et la troisième, négative, comprise entre -2 et -3.

On calculera ces racines avec une approximation suffisante, et en les substituant dans l'équation proposée on aura les valeurs des ordonnées maxima et minima de la courbe.

On remarquera en outre que pour $x=0$, $t>0$; pour $x=1$, $t<0$: par conséquent la courbe, qui, au point $x=0$,

$y=0$, tournait sa concavité vers l'axe des abscisses, tourne sa convexité vers ce même axe après ce point. Il y a donc une inflexion en ce point.

On fera des remarques analogues aux points dont les abscisses correspondent aux racines de l'équation

$$x^4-4x^3-6x^2+18x-9=0.$$

Enfin il sera facile de se convaincre que la courbe n'a ni centre, ni diamètres rectilignes.

511. *Première manière.* — Soit a le côté donné, x et y les côtés inconnus, R le rayon du cercle circonscrit, $2p$ le contour donné, et S la surface inconnue du triangle : on aura les trois relations

$$S=\frac{axy}{4R}, \qquad (1)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}, \qquad (2)$$

$$a+x+y=2p. \qquad (3)$$

Egalant les seconds membres des équations (1) et (2), élevant au carré les deux membres de cette nouvelle équation, et réduisant, on trouvera

$$x^2y^2-\frac{16R^2p(p-a)}{a^2}xy+\frac{16R^2p^2(p-a)^2}{a^2}=0;$$

d'ou l'on tire

$$xy=\frac{4p(p-a)R}{a^2}\left[2R\pm\sqrt{4R^2-a^2}\right].$$

Connaissant la somme $x+y=2p-a$, et le produit, par cette dernière valeur de xy, on déterminera sans difficulté les deux côtés inconnus du triangle, car le problème revient à ce problème élémentaire connu : Construire un rectangle, connaissant la surface et la somme de deux côtés contigus.

Deuxième manière. — A cette solution assez simple on préférera, si l'on veut, la suivante, qui n'a pas besoin du calcul : Dans un cercle O, de rayon R, inscrivez une corde BC

égale au côté donné a. Les angles supplémentaires l'un de l'autre inscrits dans les segments terminés par cette corde seront par conséquent déterminés. Désignez l'un de ces angles par A. Sur cette même corde BC décrivez un segment capable de l'angle $\frac{1}{2}$A ; puis, de l'une des extrémités B ou C, comme centre, et d'un rayon égal à $2p-a$, décrivez un arc de cercle, qui coupera ce dernier segment généralement en deux points M et M'; enfin menez les droites BM et BM', qui coupent le premier segment en des points A et A' : les triangles ABC, A'BC, satisfont à la question.

Il est facile de voir qu'on aurait pu faire la même construction sur le segment capable de l'angle $\frac{1}{2}(200^\circ - A)$, ce qui aurait donné deux nouvelles solutions.

On voit en effet, d'après le calcul précédent, que le problème a généralement quatre solutions, lesquelles se réduisent à deux dans le cas de $a=2R$; et le problème est impossible si $a>2R$, ce qui est, du reste, évident.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les principes qui se rapportent à la construction précédente.

512. Soit C le centre de la sphère totale, dont le rayon est r; G_1, le centre de gravité de l'hémisphère, dont la densité est d_1; G_2 et d_2 le centre de gravité et la densité de l'autre hémisphère; et enfin G le centre de gravité inconnu du système : en désignant par P_1, P_2, les poids des deux hémisphères, on aura

$$\frac{G_1G}{G_2G}=\frac{P_2}{P_1};$$

d'où

$$\frac{G_1C-CG}{G_2C+CG}=\frac{P_2}{P_1}, \quad \text{et} \quad CG=\frac{P_1.G_1C-P_2.G_2C}{P_1+P_2}.$$

Or

$$P_1=V_1d_1=\frac{2}{3}\pi r^3 d_1, \qquad P_2=V_2d_2=\frac{2}{3}\pi r^3 d_2,$$

$$G_1C=\frac{3}{8}r, \qquad G_2C=\frac{3}{8}r;$$

donc

$$CG = \frac{3}{4} r \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2},$$

ce qui déterminera la distance du centre de la sphère au centre de gravité du système.

Ce problème n'est qu'un cas particulier du problème suivant :

Trouver le centre de gravité d'une sphère formée de deux segments de différentes densités, connaissant la flèche d'un des segments et sa densité, ainsi que la densité de l'autre segment.

Désignons par G_1, G_2, les centres de gravité des deux segments ; par P_1, P_2 ; d_1, d_2 ; f_1, f_2, les poids, les densités et les flèches ; et enfin par r le rayon de la sphère et par G le centre de gravité de la sphère, lequel se trouvera évidemment sur la droite qui joint les centres de gravité des segments.

On aura comme précédemment

$$\frac{G_1G}{G_2G} = \frac{P_2}{P_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{G_1C - CG}{G_2C + CG} = \frac{P_2}{P_1};$$

d'où

$$CG = \frac{P_1 . G_1C - P_2 . G_2C}{P_1 + P_2}.$$

Or

$$P_1 = V_1 d_1 = d_1 \pi f_1^2 \left(r - \frac{f_1}{3}\right), \quad P_2 = V_2 d_2 = d_2 \pi f_2^2 \left(r - \frac{f_2}{3}\right);$$

et, à cause de (n° 504)

$$G_1C = \frac{\left(r - \frac{f_1}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{f_1}{3}\right)} \quad \text{et} \quad G_2C = \frac{\left(r - \frac{f_2}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{f_2}{3}\right)},$$

on aura

$$P_1 . G_1C = \pi f_1^2 \left(r - \frac{f_1}{2}\right)^2 d_1, \quad P_2 . G_2C = \pi f_2^2 \left(r - \frac{f_2}{2}\right)^2 d_2;$$

et, par suite,

$$CG=\frac{f_1^2\left(r-\frac{f_1}{2}\right)^2 d_1-f_2^2\left(r-\frac{f_2}{2}\right)^2 d_2}{f_1^2\left(r-\frac{f_1}{3}\right)d_1+f_2^2\left(r-\frac{f_2}{3}\right)d_2}.$$

Or $f_1+f_2=2r$; d'où $f_2=2r-f_1$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on obtiendra

$$CG=\frac{3}{4}\,\frac{f_1^2(2r-f_1)^2(d_1-d_2)}{f_1^2(3r-f_1)d_1+(2r-f_1)^2(r+f_1)d_2}.$$

Si $f_1=r$, on retrouve la valeur

$$CG=\frac{3}{4}\,r\,\frac{d_1-d_2}{d_1+d_2}.$$

Enfin si $d_1=d_2$, on a $CG=0$, résultat qu'on pouvait prévoir, puisque dans ce cas la sphère est homogène.

514. L'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$y=\pm\sqrt{\frac{x^3-24x+8}{x^3-2x^2-4x+8}}. \qquad (1)$$

Egalant à zéro successivement chacun des termes de la fraction, on trouve que l'équation

$$x^3-24x+8=0 \qquad (2)$$

a ses trois racines réelles, et de plus inégales, puisque aucune d'elles n'est commensurable. Deux de ces racines sont positives, comprises l'une entre 0 et 1, l'autre entre 4 et 5, et la troisième racine, négative, est comprise entre -5 et -6.

L'équation $\quad x^3-2x^2-4x+8=0 \qquad (3)$

a pour racines $x=2$, $x=2$, $x=-2$; de sorte qu'en désignant par a, b, c, les racines incommensurables de l'équation (2), l'équation proposée prendra la forme

$$y=\pm\sqrt{\frac{(x+c)(x-a)(x-b)}{(x+2)(x-2)^2}}, \qquad (4)$$

l'équation proposée (1) montre que pour $x=0$, on a $y=\pm 1$.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$ les deux facteurs $x-a$, $x-b$, sont négatifs; par conséquent le radical est réel. $x=a$ donne $y=0$. On a donc deux branches de courbe qui se réunissent en ce point de l'axe des abscisses.

De $x=a$ à $x=b$, l'ordonnée est imaginaire. Entre ces deux points il n'y a donc pas de branches de la courbe.

Pour $x=b$, $y=0$; de $x=b$ à $x=\infty$, y est réel. On a par conséquent deux branches de courbe qui, partant du point $x=b$, $y=0$, s'étendent à l'infini dans le sens des abscisses positives.

En donnant à x des valeurs négatives, on voit que de $x=0$ jusqu'à $x=-2$, y est réel; pour $x=-2$, $y=\infty$; les deux branches de courbe, qui se réunissent au point $x=a$, $y=0$, s'étendent indéfiniment au dessus des abscisses négatives, ayant pour asymptote la droite $x=-2$.

De $x=-2$ à $x=-c$, l'ordonnée est imaginaire. Point de courbe dans cet intervalle.

$x=-c$ donne $y=0$, et de $x=-c$ à $x=-\infty$, y est toujours réel: on a donc encore deux branches de courbe partant du point $x=-c$, $y=0$, et s'étendant indéfiniment dans le sens des abscisses négatives.

Afin de déterminer l'équation générale des tangentes à la courbe, on mettra l'équation (1) sous la forme

$$(x^3-2x^2-4x+8)y^2-(x^3-24x+8)=0.$$

Et si l'on désigne par $f'(x)$, $f'(y)$, les dérivées de cette équation par rapport à x et à y, on aura

$$f'(x)=y^2(3x^2-4x-4)-(3x^2-24),$$
$$f'(y)=2y(x^3-2x^2-4x+8);$$

d'où

$$t=-\frac{f'(x)}{f'(y)}=\mp\frac{x^3-18x^2-12x-40}{\sqrt{(x^3-24x+8)(x^3-2x^2-4x+8)}}.$$

Les abscisses des points de la courbe où la tangente est

parallèle à l'axe des abscisses seront données par l'équation

$$x^3-18x^2-12x-40=0,$$

qui n'a qu'une racine réelle comprise entre 18 et 19.

Pour déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées, on posera $x^3-24x+8=0$, et $x^3-2x^2-4x+8=0$, dont les racines sont, ainsi qu'on l'a vu, $x=2$, $x=2$, $x=-2$; $x=2$ donne pour y une valeur imaginaire et ne répond à aucun point; $x=-2$ donne l'asymptote aux deux branches de la courbe qui se réunissent au point $x=a$, $y=0$.

Les racines de l'équation $x^3-24x+8=0$, c'est-à-dire a, b, $-c$, sont les abscisses des points où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées; ce sont les points où se réunissent les deux branches qui ont pour asymptote $x=2$ et celles qui s'étendent indéfiniment dans le sens des abscisses positives et négatives en s'écartant de l'axe des ordonnées.

Afin d'obtenir les asymptotes, on extraira la racine de la fraction, après avoir rendu le dénominateur carré parfait; puis, effectuant la division, on trouvera

$$y=\pm\left(1+\frac{1}{x}-\frac{17}{2x^2}\cdots\cdots\right),$$

ordonné suivant les puissances décroissantes de l'abscisse, ou

$$y=\mp\left(1-\frac{5}{4}x-\frac{21}{32}x^2\cdots\cdots\right),$$

selon les puissances ascendantes de la même variable.

Le premier développement donne $y=\pm1$ pour asymptotes communes aux branches indéfinies de la courbe dirigées dans le sens des abscisses positives et négatives.

Une particularité assez remarquable, c'est que les branches dirigées dans le sens des abscisses positives coupent d'abord leurs asymptotes pour s'en rapprocher ensuite indéfiniment.

On peut le voir facilement par l'équation (1) mise sous la forme

$$y=\pm\sqrt{1+\frac{2x(x-10)}{(x+2)(x-2)^2}}.$$

Pour $x<10$, la valeur de la fraction est négative; mais pour $x>10$ la valeur de la fraction sera positive, et par conséquent l'ordonnée de la courbe sea plus grande que l'ordonnée de l'asymptote.

On aurait deux asymptotes hyperboliques en prenant

$$y=\pm\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

L'axe des abscisses est évidemment un diamètre de la courbe.

515. Les droites étant prises pour axes, soit α, 0 ; 0, β ; x, y, les coordonnées variables des sommets C, B, A (fig. 59), du triangle proposé, dont les côtés donnés sont c, b, a; et X, Y, les coordonnées du centre de gravité dans une position quelconque du triangle : on aura les relations

$$x^2+(y-\beta)^2=c^2, \qquad (1)$$

$$y^2+(x-\alpha)^2=b^2, \qquad (2)$$

$$\alpha^2+\beta^2=a^2, \qquad (3)$$

$$X=\frac{x+\alpha}{3}, \qquad (4)$$

$$y=\frac{y+\beta}{3}, \qquad (5)$$

entre lesquelles il ne restera plus qu'à éliminer les variables x, y; α, β, pour obtenir l'équation finale

$$\left(\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9}\right)Y^2-\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{9}X^2+\left(\frac{5a^2-b^2-c^2}{18}\right)^2=$$

$$2Y\frac{5a^2-b^2-c^2}{18}\sqrt{\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9}-X^2}.$$

Cette équation du lieu géométrique cherché prend une forme très simple si l'on observe qu'en désignant par l, l', l'', les droites des milieux correspondantes aux sommets C, B, A, on a

$$2(a^2+c^2)-b^2=4l'^2,\quad 2(a^2+b^2)-c^2=4l^2,\quad 2(b^2+c^2)-a^2=4l''^2;$$

et de plus $\qquad 5a^2-b^2-c^2=4(l^2+l'^2-l''^2)$.

Et l'équation finale devient par conséquent

$$l'^2Y^2-l^2X^2+\left(\frac{l^2+l'^2-l''^2}{3}\right)^2=Y(l^2+l'^2-l''^2)\sqrt{\frac{4}{9}l^2-X^2}, \text{(F)}$$

équation généralement du 4e degré.

Mais si $l^2+l'^2-l''^2=0$, l'équation (F) devient

$$Y=\pm\frac{l}{l'}X,$$

et représente deux lignes droites.

De là ce théorème :

Si un triangle dans lequel les droites médianes peuvent former un triangle rectangle se meut sur deux droites fixes perpendiculaires, de manière que deux de ses sommets soient assujettis à rester constamment sur ces axes, le centre de gravité du triangle parcourra une ligne droite passant par le point de concours des axes. Et si de plus le triangle est isocèle, la ligne droite parcourue par le centre de gravité partage l'angle des axes en deux parties égales.

La relation $l^2+l'^2-l''^2=0$, ou $5a^2-b^2-c^2=0$, peut encore s'exprimer par

$$4a^2-(b^2+c^2-a^2)=4a^2-2bc\cos A,$$

et comme $bc\sin A=2S$, S étant la surface du triangle, exprimée aussi par ah, h étant la hauteur du triangle correspondante au sommet A, on pourra exprimer la relation

précédente par

$$a^2\tang A = S, \quad \text{ou} \quad a\tang A = \frac{h}{2}.$$

516. Soit ABCD (fig. 60) le trapèze, supposé construit ; $CD=x$, $AD=y$, $AB=z$, $CB=u$: si l'on mène CE parallèle à AD et DF perpendiculaire à AB, en désignant par $2p$ le périmètre donné, et par m^2 le double de la surface, on aura les relations

$$x+y+z+u=2p, \tag{1}$$

$$(x+z)y\sin A = m^2, \tag{2}$$

$$\frac{u}{y}=\frac{\sin A}{\sin B}, \tag{3}$$

$$\frac{z-x}{u}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A}; \tag{4}$$

éliminant z et u entre ces équations, on trouve

$$y+\frac{2\sin B}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}x-\frac{2p\sin B}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}=0, \quad \text{(D)}$$

$$y^2+\frac{2\sin B}{\sin(A+B)}xy-\frac{m^2}{\sin A\sin(A+B)}=0. \quad \text{(H)}$$

Le sommet C du trapèze sera déterminé par l'intersection d'une hyperbole (H) et d'une droite (D) déterminées.

L'élimination directe entre ces deux équations fournirait la valeur des côtés x et y, et par suite celle des côtés z et u.

Si $A=B$, les équations finales (H) et (D) prennent la forme

$$y^2+\frac{xy}{\cos A}-\frac{m^2}{\sin 2A}=0,$$

$$y+\frac{1}{2}\text{séc}^2\frac{1}{2}Ax-p\,\text{séc}^2\frac{1}{2}A=0.$$

Enfin si $A=100°$, les équations finales deviennent

$$y^2+2\tang B xy-m^2\tang B=0,$$

$$y+\frac{2x}{1+\cot\frac{1}{2}B}-\frac{2p}{1+\cot\frac{1}{2}B}=0.$$

517. En supposant le problème résolu, soit DSF (fig. 61) l'axe de la parabole, F le foyer et DIG la directrice. D'après la propriété de la parabole, on aura AF=AI, BF=BG ; et, désignant par I l'angle ASF, inconnu ; par a l'angle ASB, donné ; et faisant SD=SF=x, la distance inconnue du sommet au foyer ou à la directrice ; AS=d, BS=d', distances connues : on trouvera pour équations de condition

$$\sqrt{d^2+x^2-2dx\cos I}=x+SP=x+d\cos I, \qquad (1)$$

$$\sqrt{d'^2+x^2-2d'x\cos(I-a)}=x+SQ=x+d'\cos(I-a). \qquad (2)$$

Développant et réduisant, on obtient

$$d\sin^2 I-4x\cos I=0, \qquad (3)$$

$$d'\sin^2(I-a)-4x\cos(I-a)=0, \qquad (4)$$

entre lesquelles il faut éliminer pour déterminer x et l'angle I. De l'équation (3) on tire $4x=d\sin I\tang I$; substituant dans l'équation (4), et développant, on obtient, en faisant $\frac{d}{d'}=r$

$$r\sin a\tang^3 I+\cos a(r-\cos a)\tang^2 I+2\sin a\cos a\tang I-\sin^2 a=0,$$

équation du 3e degré, qui déterminera l'angle I.

La relation

$$x=\frac{d\sin I\tang I}{4}$$

achèvera de déterminer le foyer.

518. Soit OM=α, ON=β ; OM'=α', ON'=β', les distances infiniment rapprochées où deux droites successives MN, M'N', viennent rencontrer les axes fixes OX, OY, pris pour axes des coordonnées : les équations de ces droites seront

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1, \qquad \frac{y}{\beta'}+\frac{x}{\alpha'}=1; \qquad (1)\ (2)$$

et l'on aura, en désignant par θ l'angle des axes, et par l la

longueur donnée,

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta=l^2, \qquad (3)$$

$$\alpha'^2+\beta'^2-2\alpha'\beta'\cos\theta=l^2. \qquad (4)$$

Des équations (1) et (2), on tire

$$\left[y-\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\right]+\left[x-\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\right]\left(\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\right)=0; \qquad (5)$$

la combinaison des équations (3) et (4) donne la valeur de

$$\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'};$$

d'où l'on tire, en substituant cette valeur dans l'équation (5)

$$\left[y-\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\right]-\left[x-\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\right]\left(\frac{(\alpha+\alpha')-2\left(\frac{\beta+\beta'}{2}\right)\cos\theta}{(\beta+\beta')-2\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\cos\theta}\right)=0.$$

Faisant $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, pour exprimer que les deux droites MN, M'N', sont infiniment rapprochées, on obtient

$$(y-\beta)-(x-\alpha)\left[\frac{\alpha-\beta\cos\theta}{\beta-\alpha\cos\theta}\right]=0. \qquad (6)$$

l'élimination de α et β entre les équations (1), (3) et (6), donnera le lieu géométrique cherché.

En mettant successivement l'équation (1) sous la forme

$$\frac{y-\beta}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=0, \qquad \frac{y}{\beta}+\frac{x-\alpha}{\alpha}=0,$$

et substituant dans l'équation (6), on ramènera, en ayant égard à l'équation (3), le système des équations (1), (3), (6), au système suivant :

$$\alpha^2(\alpha-\beta\cos\theta)=l^2x, \quad \beta^2(\beta-\alpha\cos\theta)=l^2y, \quad \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta=l^2. \quad (a)$$

Mais, sans développer le cas général, qui donnerait une équation assez compliquée, nous supposerons les axes fixes rectangulaires en posant $\cos\theta=0$; alors les équations (a) donnent $\alpha^3=l^2x$, $\beta^3=l^2y$, et enfin

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}},$$

équation du lieu géométrique dans ce cas particulier.

La courbe se compose de quatre branches symétriquement placées dans chacun des angles formés par les droites rectangulaires, et tournant leur convexité vers l'origine ou point de concours de ces droites.

519. L'équation résolue donne

$$y=\frac{1}{x}\pm\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

La courbe se compose de quatre branches, dont deux, discontinues, ont pour asymptotes $x=0$ et $y=1$, $y=-1$; les deux autres branches continues sont asymptotes aux mêmes droites $y=\pm 1$.

L'inclinaison de la tangente est donnée par

$$t=-\frac{1}{x^2}\pm\frac{1}{2x^2\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

La tangente parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x=1$, et la tangente est parallèle à l'axe des abscisses au point $\left(x=\frac{4}{3},\ y=\frac{3}{2}\right)$.

520. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes,

$$A'^2y'^2-B'^2x'^2=-A'^2B'^2 \tag{2}$$

l'équation de l'hyperbole,

$$A'^2+B'^2=A^2-B^2 \tag{3}$$

la relation entre les axes pour que les courbes aient les mêmes foyers,

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2 \quad \text{ou} \quad y=-\frac{B^2x'}{A^2y'}x+\frac{B^2}{y'} \tag{4}$$

l'équation de la tangente à l'ellipse au point x', y';

$$A'^2yy'-B'^2xx'=-A'^2B'^2 \text{ ou } y=\frac{B'^2x'}{A'^2y'}x-\frac{B'^2}{y'} \quad (5)$$

l'équation de la tangente à l'hyperbole au même point x', y' :

La tangente de l'angle γ que les deux tangentes font entre elles sera exprimée par

$$\tan g\gamma=\frac{(A^2B'^2+A'^2B^2)x'y'}{A^2A'^2y'^2-B^2B'^2x'^2},$$

et, à cause de l'équation (1), par

$$\tan g\gamma=\frac{(A^2B'^2+A'^2B^2)x'y'}{B^2[A^2A'^2-(A'^2+B'^2)x'^2]}.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$x'^2=\frac{A^2A'^2(B^2+B'^2)}{A'^2B^2+A^2B'^2};$$

mais à cause de l'équation (3), on a

$$A^2B'^2+A'^2B^2=(A^2-A'^2)(A^2-B^2),$$

et $$(A'^2+B'^2)(B^2+B'^2)=(A^2-B^2)(A^2-A'^2);$$

par conséquent

$$x'^2=\frac{A^2A'^2}{A^2-B^2}, \quad \text{et} \quad y'^2=\frac{B^2B'^2}{A^2-B^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de tang γ, et réduisant, on trouvera

$$\tan g\gamma=\frac{AB'(A'^2-A^2)}{A'B(A^2-B^2)}.$$

On peut reconnaître par cette valeur que les tangentes au point d'intersection des deux courbes, et par conséquent les courbes elles-mêmes, se coupent toujours sous un angle obtus.

Nous laissons au lecteur le soin de résoudre le problème suivant :

Quelle est la relation nécessaire entre les axes d'une ellipse et d'une hyperbole concentriques et rapportées aux mêmes axes coordonnées pour que les deux courbes se coupent à angle droit ?

521. Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$ celle du cercle osculateur, c'est-à-dire d'un cercle qui passe par trois points de la courbe infiniment rapprochés.

Si l'on désigne par x', y'; x'', y''; x''', y''', les coordonnées de ces points, on aura en même temps les relations

$$(e)\quad \begin{cases} A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2, \\ A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2, \\ A^2y'''^2+B^2x'''^2=A^2B^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\rho^2, \\ (x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2=\rho^2, \\ (x'''-\alpha)^2+(y'''-\beta)^2=\rho^2; \end{cases}\quad (c)$$

des équations (e) on tire, par soustraction,

$$\begin{cases} (x'^2-x''^2)-2\alpha(x'-x'')+(y'^2-y''^2)-2\beta(y'-y'')=0, \\ (x''^2-x'''^2)-2\alpha(x''-x''')+(y''^2-y'''^2)-2\beta(y''-y''')=0. \end{cases}\quad (c')$$

et des équations (c)

$$\begin{cases} A^2(y'^2-y''^2)+B^2(x'^2-x''^2)=0, \\ A^2(y''^2-y'''^2)+B^2(x''^2-x'''^2)=0. \end{cases}\quad (e')$$

Divisant la première des équations (c') par $x'-x''$, et remplaçant le rapport $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ par sa valeur tirée de la première des équations (e'); ensuite, faisant $x''=x'$ et $y''=y'$, pour exprimer que les deux points x', y'; x'', y'', sont infiniment rapprochés, on obtient,

$$(A^2-B^2)x'y'-A^2\alpha y'+B^2\beta x'=0. \qquad (1)$$

En combinant de la même manière les secondes équations (c') et (e'), on trouvera de même

$$(A^2-B^2)x''y''-A^2\alpha y''+B^2\beta x''=0. \qquad (2)$$

Retranchant (2) de (1), remplaçant dans le résultat $x'y'-x''y''$ par $\frac{(x'+x'')(y'-y'')+(x'-x'')(y'+y'')}{2}$, divisant par $x'-x''$, substituant de même au rapport $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ sa valeur $-\frac{B^2(x'+x'')}{A^2(y'+y'')}$, et faisant encore $x''=x'$, $y''=y'$, on ob-

tient l'équation

$$(A^2-B^2)(A^2y'^2-B^2x'^2)+A^2(\alpha x'+\beta y')=0. \quad (3)$$

Enfin la combinaison des équations (1) et (3) donnera directement les valeurs de α et β, coordonnées du centre du cercle osculateur correspondant au point x', y'; on trouvera facilement, à cause de $A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2$, les valeurs suivantes

$$\alpha=\frac{c^2x'^3}{A^4}, \quad \beta=-\frac{c^2y'^3}{B^4},$$

dans lesquelles $c^2=A^2-B^2$.

Pour trouver l'équation du lieu géométrique des centres des cercles osculateurs, il suffira d'éliminer x' et y' entre les trois équations précédentes, et l'on trouvera sans difficulté

$$(B\beta)^{\frac{2}{3}}+(A\alpha)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (D)$$

Le centre du cercle osculateur s'appelle aussi centre de courbure au point correspondant de l'ellipse, et la courbe (D) la développée de l'ellipse, qui prend le nom de développante. On voit facilement que les rayons des cercles osculateurs, ou rayons de courbure, sont normaux à l'ellipse, et de plus tangents à la développée, car chacun de ces rayons n'a qu'un point commun avec cette courbe. L'ellipse peut donc être considérée comme provenant du déroulement d'un fil enroulé primitivement autour de sa développée (D).

Ces calculs s'appliquent pareillement à l'hyperbole, et si l'on change, dans l'équation (D), B en $B\sqrt{-1}$, on trouvera pour la développée de l'hyperbole

$$(A\alpha)^{\frac{2}{3}}-(B\beta)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (D')$$

En appliquant le même calcul à l'équation de la parabole $y^2=2px$, on aura, pour déterminer le centre de courbure en un point quelconque x', y', les trois équations

$$x'y'-(\alpha-p)y'-p\beta=0, \quad (1)$$

$$y'^2+px'-p(\alpha-p)=0, \quad (2)$$

$$y'^2=2px'; \quad (3)$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\alpha=p+3x', \quad \beta=-2x'y';$$

et par suite

$$x'=\frac{\alpha-p}{3}, \quad y'=\frac{3p\beta}{2(\alpha-p)};$$

d'où l'on conclut pour l'équation de la développée

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3=0.$$

On a trouvé pour les coordonnées du centre de courbure au point x', y', de l'ellipse les valeurs

$$\alpha=\left(\frac{A^2-B^2}{A^4}\right)x'^3, \quad \beta=-\left(\frac{A^2-B^2}{B^4}\right)y'^3,$$

qui se construisent de la manière suivante (fig. 62):

Au point donné M, x', y', mener la tangente MT, et, par le centre O de l'ellipse, le diamètre DD', parallèle à la tangente; puis le diamètre égal EE'; et, par le point M, parallèlement à ce diamètre, la corde MN, qui coupe l'ellipse au point N: le cercle qui passera par les points N et M tangentiellement en ce dernier point à l'ellipse et à sa tangente MT sera le cercle osculateur cherché.

En effet, la tangente MT a pour équation

$$y-y'=-\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x');$$

le diamètre DD',

$$y=-\frac{B^2x'}{A^2y'}x;$$

le diamètre égal EE',

$$y=\frac{B^2x'}{A^2y'}x;$$

et enfin la corde MN, parallèle à EE′,

$$y-y'=\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x'). \qquad (1)$$

L'équation de l'ellipse étant

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2, \qquad (2)$$

si l'on élimine entre les équations (1) et (2), on trouvera d'abord

$$y=\frac{B^2x'x+(A^2y'^2-B^2x'^2)}{A^2y'},$$

et, par la substitution dans l'équation (2),

$$x=-\frac{B^2x'(A^2y'^2-B^2x'^2)\pm 2A^2B^2x'y'^2}{A^2B^4};$$

d'où, par conséquent les valeurs $x_1=x'$, ce qu'on savait déjà,

$$x_2=-x'\left(\frac{3A^2y'^2-B^2x'^2}{A^2B^2}\right),$$

abscisse du point N.

L'abscisse du point I, milieu de MN, sera

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{x'}{A^2}(A^2-2x'^2).$$

Pour trouver l'ordonnée du point N, on substituera la valeur de x_2 dans l'équation (1), et l'on trouvera

$$y_2=\frac{y'}{2}(A^2-4x'^2);$$

l'ordonnée du point I sera donc

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(y'+y_2)=\frac{(A^2-2x'^2)y'}{A^2}.$$

Cela posé, la droite MC, perpendiculaire au point M à la tangente MT, a pour équation

$$\beta-y'=\frac{A^2y'}{B^2x'}(\alpha-x'), \qquad (3)$$

et la droite IC, perpendiculaire sur le milieu de la corde MN,

$$\beta-\left(\frac{A^2-2x'^2}{A^2}\right)y'=-\frac{A^2y'}{B^2x'}\left[\alpha+\left(\frac{A^2-2x'^2}{A^2}\right)x'\right]. \qquad (4)$$

Éliminant entre ces équations, on obtiendra sans difficulté pour les coordonnées du point d'intersection des deux droites

$$\alpha = \frac{(A^2-B^2)x'^3}{A^4}, \qquad \beta = -\frac{(A^2-B^2)y'^3}{B^4}.$$

Le calcul serait exactement le même pour l'hyperbole ; il suffirait de changer B^2 en $-B^2$.

Au surplus cette construction se démontre aisément sans le secours de ce calcul : en effet, on sait que lorsque deux sécantes MN, PQ (fig. 63), parallèles à deux diamètres quelconques AA', BB', se coupent soit dans l'intérieur, soit au dehors de l'ellipse, le rapport des produits des segments de ces cordes est égal au rapport des carrés des demi-diamètres qui leur sont respectivement parallèles ; on aura donc

$$\frac{IM.IN}{IP.IQ} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{OB}^2};$$

et si les diamètres sont égaux, on a IM.IN=IP.IQ ; par conséquent les quatre points M, N, P, Q, sont sur une même circonférence.

Supposons que les points M et Q (fig. 64) se confondent, ou ce qui revient au même, soit MN, MP, deux cordes parallèles à deux diamètres égaux : la circonférence passant par les trois points M, N, P, aura deux points communs avec l'ellipse au point M, c'est-à-dire que la tangente à l'ellipse au point M sera aussi tangente à la circonférence. Mais si de plus le point P tombe aussi en M ; si, ayant mené la tangente MT (fig. 65) au point M, ensuite un diamètre parallèle et construit son égal, on mène par M une parallèle MN à ce second diamètre, elle coupera la courbe en N, et le cercle qui passera par M et N tangentiellement à MT au point M aura trois points communs avec l'ellipse : ce sera le cercle *osculateur*.

La construction précédente cesse d'être applicable aux

sommets, extrémités des axes principaux ; mais on peut, dans ces cas particuliers, déterminer facilement le centre et le rayon de courbure par les valeurs

$$\alpha=\left(\frac{A^2-B^2}{A^4}\right)x'^3, \qquad \beta=-\left(\frac{A^2-B^2}{B^4}\right)y'^3.$$

S'il s'agit du sommet correspondant au grand axe, on a $x'=A$ et $y'=0$, et par conséquent

$$\beta=0, \qquad \alpha=\frac{A^2-B^2}{A}=A-\frac{B^2}{A}.$$

Au lieu de construire directement cette valeur, on déterminera le rayon de courbure, $\rho=A-\alpha=\frac{B^2}{A}$ ou le demi-paramètre. Pour le sommet correspondant au petit axe on a $x'=0$, $y'=B$; d'où $\alpha=0$, $\beta=-\frac{(A^2-B^2)}{B}$.

Ces deux solutions sont réunies dans la construction suivante (fig. 66), et s'appliquent à l'ellipse et à l'hyperbole :

Sur OA, demi-grand axe (fig. 66), décrire une demi-circonférence, et par le sommet B' mener une parallèle BG au grand axe; du point O, comme centre, et avec un rayon égal à $OF=\sqrt{A^2-B^2}$, décrire une circonférence qui coupe la demi-circonférence en I et la parallèle en H ; abaisser enfin IC perpendiculaire sur OA, et mener HC' perpendiculaire à OH ; les points C et C' sont les centres de courbure correspondant aux sommets A et B.

Pour la parabole, on remplace les diamètres égaux par les tangentes égales qui se rencontrent sur l'axe.

En effet, si deux sécantes MN, PQ, parallèles à deux tangentes ST, ST', se rencontrent en un point quelconque I, intérieur ou extérieur à la courbe, on a

$$\frac{IM.IN}{IP.IQ}=\frac{\overline{ST}^2}{\overline{ST'}^2};$$

et, si les tangentes sont égales, on a $IM.IN=IP.IQ$, et les points M, N, P, Q, sont sur une même circonférence.

Si les points M et Q se confondent en un seul, c'est-à-dire si les cordes MP, MN sont parallèles (fig. 68) aux tangentes égales ST, ST', la circonférence qui passera par les trois points M, N, P aura deux points communs avec la parabole. Enfin si le point P coïncide avec M (fig. 69), la circonférence qui touchera en M la tangente MP à la parabole en ce même point, et qui passera par le point N, où la corde MN parallèle à la tangente SM' égale à SM rencontre la courbe, aura trois points communs avec elle, et sera par conséquent le cercle osculateur au point M.

On peut vérifier cette construction en la soumettant au calcul. En effet, on a trouvé pour les coordonnées du centre de courbure les valeurs

$$\alpha=p+3x', \qquad \beta=\frac{2(p-\alpha)y'}{3p} \text{ ou } \beta=-\frac{2x'y'}{p}.$$

Or l'équation de la tangente MP au point M (x', y') est

$$y-y'=-\frac{p}{y'}(x-x'),$$

et la perpendiculaire MC à cette tangente au même point M

$$\beta-y'=-\frac{y'}{p}(\alpha-x'). \qquad (1)$$

Cela posé, la corde MN, parallèle à la tangente égale SM', aura pour équation

$$y-y'=-\frac{p}{y'}(x-x'). \qquad (2)$$

L'équation de la courbe étant

$$y^2=2px, \qquad (3)$$

on tire sans difficulté pour les abscisses des points de rencontre de la corde avec la parabole $x_1=x'$, $x_2=9x'$; d'où $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=5x$, abscisse du point I, milieu de la corde MN. L'équation (2) donne, par la substitution de x_1 et x_2, $y_1=y'$, $y_2=-3y'$; d'où $\frac{1}{2}(y_1+y_2)=-y'$, ordonnée du point I.

On aura donc pour l'équation de la perpendiculaire IC

$$\beta+y'=\frac{y'}{p}(\alpha-5x'), \qquad (1)$$

et la combinaison des équations (1) et (4) donnera les valeurs précédentes de α et de β.

Cette construction est également en défaut au sommet; mais pour ce cas particulier on a $x'=0$, d'où $\alpha=p$; et par conséquent le rayon de courbure au sommet de la parabole est, comme pour les deux autres courbes, égal au demi-paramètre.

Au point x', y', de l'éllipse $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, le centre de courbure a pour coordonnées

$$\alpha=\left(\frac{A^2-B^2}{A^4}\right)x'^3, \qquad \beta=-\left(\frac{A^2-B^2}{B^4}\right)y'^3;$$

et le rayon de courbure est exprimé par $\rho^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2$ ou

$$\rho^2=x'^2\left[\frac{A^4-(A^2-B^2)x'^2}{A^4}\right]^2+y'^2\left[\frac{B^4+(A^2-A^2)y'^2}{B^4}\right]^2,$$

expression qui devient, après quelques transformations assez faciles,

$$\rho^2=[(A^2+B^2)-(x'^2+y'^2)]^2\frac{A^4y'^2+B^4x'^2}{A^4B^4}.$$

Or, d'après une propriété connue, la somme des carrés des demi-axes peut-être remplacée par la somme des carrés de deux demi-diamètres quelconques, et par conséquent par la somme des carrés des demi-diamètres conjugués dont l'un passe par le point donné, et qui ont pour expression

$$A'=\sqrt{x'^2+y'^2}, \quad \text{et} \quad B'=\sqrt{\left(\frac{A^2y'^2+B'x'^2}{A^2B^2}\right)}:$$

car ces diamètres ont pour équations

$$y=\frac{y'}{x'}x, \qquad y=-\frac{B^2x'}{A^2y'}x;$$

l'expression précédente de ρ^2 deviendra donc

$$\rho^2 = \left(\frac{A^4y'^2 + B^4x'^2}{A^8B^8}\right)^3.$$

Or on a, en désignant par N la tangente de la normale,

$$A^4y'^2 + B^4x'^2 = A^4N^2,$$

et par suite

$$\rho = \frac{N^3}{\left(\frac{B^2}{A}\right)^2},$$

de là ce théorème :

Le rayon de courbure en un point quelconque d'une ellipse ou d'une hyperbole est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.

L'expression de ρ peut se mettre encore sous la forme

$$\rho = \frac{\left(\frac{A^4y'^2 + B^4x'^2}{A^2B^2}\right)}{\frac{A^2B^2}{\sqrt{A^4y'^2 + B^4x'^2}}}.$$

Or, d'après la formule connue de la distance d'un point x', y', à une droite $y - ax - b = 0$,

$$P = \mp \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

la distance du point de contact au diamètre conjugué à ce point sera

$$\frac{A^2B^2}{\sqrt{A^4y'^2 + B^4x'^2}};$$

On peut donc dire aussi :

Le rayon de courbure en un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole est égal au carré du demi-diamètre conjugué à ce point divisé par la distance du point au diamètre.

Enfin si l'on observe que le sinus de l'angle de deux droites dont les équations sont $y=ax$, $y=a'x$, est exprimé par

$$\sin I=\frac{a'-a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}},$$

le sinus de l'angle des diamètres conjugués dont les équations sont $y=\frac{y'}{x'}x$, $y=-\frac{B^2x'}{A^2y'}x$, sera exprimé par

$$\sin I=\frac{A^2B^2}{\sqrt{x'^4+y'^4}\sqrt{A^4y'^2+B^4x'^2}};$$

et la valeur de ρ, mise sous la forme

$$\rho=\frac{\left(\frac{B'^2}{A'}\right)}{\sin I},$$

fournit cet autre énoncé :

Le rayon de courbure en un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole est égal au demi-paramètre relatif à ce point divisé par le sinus de l'inclinaison des diamètres conjugués, qui est la même que celle de la tangente sur le diamètre du point de contact.

D'où l'on déduit la construction suivante, plus simple que celle qui précède.

Pour déterminer le centre et le rayon de courbure en un point A de l'ellipse (fig. 70 et 71), mener le diamètre AA' et la tangente AT, puis le diamètre BB' conjugué à AA' et par conséquent parallèle à la tangente ; chercher une troisième proportionnelle entre OA et OB ; soit AG cette troisième proportionnelle [Deux constructions, selon que $A>B$ (fig. 70) ou $A=B$ (fig. 71)], et par le point G mener GC perpendiculaire à AA', le point où cette droite rencontre la normale au point A est le centre de courbure.

En effet

$$AC=\frac{AG}{\sin I} \quad \text{et} \quad AG=\frac{B'^2}{A'}.$$

Cette construction s'applique à tous les points de la courbe.

On a en effet aux sommets principaux $\rho_1 = \frac{B^2}{A}$, $\rho_2 = \frac{A^2}{B}$.

Le rayon de courbure

$$\rho^2 = \left(\frac{A^4y'^2 + B^4x'^2}{A^8B^8}\right)^3$$

peut encore prendre la forme

$$\rho^2 = \frac{\left(A + \frac{cx'}{A}\right)^3 \left(A - \frac{cx'}{A}\right)^3}{A^2B^2}.$$

Or $\left(A + \frac{cx'}{A}\right)$ et $\left(A - \frac{cx'}{A}\right)$ représentent les longueurs des rayons vecteurs menés des foyers négatif et positif : si donc l'on représente par M une moyenne proportionnelle entre ces distances, on aura

$$\rho^2 = \frac{M^6}{A^2B^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{M^3}{AB},$$

et par conséquent,

Le rayon de courbure en un point quelconque est égal au cube de la moyenne proportionnelle entre les distances des foyers à ce point divisé par le carré de la moyenne proportionnelle entre les demi-axes.

On sait en outre qu'en désignant par d la distance du centre à la tangente, et par r, r', les rayons vecteurs des foyers au point de contact, on a

$$d = \frac{AB}{\sqrt{rr'}}, \quad \text{d'où} \quad AB = d\sqrt{rr'};$$

et à cause de $\rho^2 = \frac{r^3r'^3}{A^2B^2}$, on aura $\rho = \frac{rr'}{d}$: donc

Le rayon de courbure en un point quelconque est une qua-

trième proportionnelle entre la distance du centre à la tangente et les rayons vecteurs menés du foyer.

Ce qui fournit une construction beaucoup plus simple que les précédentes et qui s'applique à tous les points de la courbe (ellipse ou hyperbole).

Quant à la parabole, on a trouvé pour les valeurs du centre de courbure au point x', y',

$$\alpha = p + 3x', \qquad \beta = -\frac{2x'y'}{p},$$

et

$$\rho^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = (p+2x')^2\left(1+\frac{y'^2}{p^2}\right);$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{2\left(\frac{p}{2}+x'\right)}{\left(\frac{\left(\frac{p}{y'}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{y'}\right)^2}}\right)}.$$

Or, d'après une propriété connue de la parabole, $\frac{p}{2} + x'$ exprime la distance du foyer au point x', y'; et $2\left(\frac{p}{2}+x'\right)$ représente la moitié du paramètre du diamètre qui passe par ce point.

D'un autre côté

$$\frac{\frac{p}{y'}}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{y'}\right)^2}}$$

représente le sinus de l'angle que la tangente au point x', y', fait avec l'axe de la parabole, car cet angle a pour tangente $\frac{p}{y'}$.

De là ce théorème :

Le rayon de courbure en un point quelconque de la para-

bole est égal au demi-paramètre du diamètre passant par ce point divisé par le sinus de l'angle que la tangente fait avec lui.

Et par conséquent on a ce théorème général pour les trois courbes du 2e degré :

Le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe au 2e degré est égal au demi-paramètre relatif à ce point divisé par le sinus de l'angle des diamètres conjugués.

Et, comme cas particulier :

Le rayon de courbure au sommet principal d'une courbe du 2e degré est égal au demi-paramètre.

522. Courbe composée de deux branches, comme l'hyperbole ordinaire, et comprise entre les asymptotes $y=0$, $y=-x+1$.

Les tangentes sont parallèles à l'axe des ordonnées aux points où la courbe coupe son diamètre ; elle n'a pas de tangentes parallèles à l'axe des abscisse.

523. Soit fait

$$\sqrt[3]{-9+46\sqrt{-1}}=(x+y\sqrt{-1}).$$

On trouve, en développant et égalant les rationnelles et les irrationnelles, les équations

$$x^3-3xy^2+9=0, \quad 3x^2y-y^3-46=0, \quad (1)\,(2)$$

qui serviront à déterminer les quantités x et y.

Multipliant l'équation (1) par $3y$ et l'équation (2) par x, on obtient, en soustrayant les produits,

$$(8x^3-9)y-138x=0, \quad (3)$$

équation qui pourra remplacer l'une des équations précédentes pour l'élimination de y.

Eliminant y entre les équations (1) et (3) par la méthode du plus grand commun diviseur, on trouve facilement pour équation finale

$$64x^9+432x^6-58347x^3+729=0. \qquad (X)$$

Il est facile de voir que cette équation n'a que trois racines réelles. On trouve sur-le-champ pour racine commensurable $x_1=3$.

Mais sans s'attacher à cette équation complète, on fera $x^3=z$, ce qui donne

$$64z^3+432z^2-58347z+729=0. \qquad (Z)$$

Cette équation admet pour racine commensurable $z_1=27$. Divisant par $z-27$, on obtient, en égalant le quotient à zéro pour avoir les autres racines,

$$64z^2+2160z-27=0;$$

d'où l'on tire

$$z=-\frac{1080}{64}\pm\frac{1}{64}\sqrt{(1080)^2-27.64};$$

et par conséquent, après réductions convenables, on trouvera pour les valeurs de x_2 et x_3

$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{135\mp\sqrt{18252}}.$$

On sait que pour pouvoir réduire une expression de la forme $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$ à la forme $(a\pm\sqrt{b})\sqrt[3]{c}$, il faut et il suffit que, après avoir choisi c tel que $\sqrt[3]{(A^2-B)c}$ soit un nombre rationnel, ce qui est toujours possible, et représenté $\frac{\sqrt[3]{(A^2-B)c}}{c}$ par M, l'équation $4ca^3-3Mca-A=0$ admette au moins une valeur commensurable. Alors, a étant cette valeur, on a $a^2-b=M$; et, c étant connu, on obtient les valeurs de a, b et c. Or ici l'on a $A^2-B=18252-18252=-27$; par conséquent $c=1$ et $M=-3$.

En outre l'équation de condition se réduit à

$$4a^3+9a-135=0,$$

qui admet pour racine $a=3$: on obtient donc $a=3$, $b=12$, et par suite

$$(x_2,\ x_3)=-\frac{3\pm2\sqrt{3}}{2}.$$

Les valeurs correspondantes de y seront données par l'équation

$$(8x^3-9)y-138x=0\,;$$

d'où

$$y=\frac{138x}{8x^3-9}.$$

Pour la valeur $x_1=3$, on obtient sans difficulté $y_1=2$.

Pour la valeur $x_2=-\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$, on trouve, après réductions convenables,

$$y_2=-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}.$$

Pour la troisième valeur $x_3=-\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$, on obtient, par un calcul semblable,

$$y_3=-\frac{2-3\sqrt{3}}{2}.$$

Il resterait à combiner les valeurs imaginaires de l'unité pour compléter la question et donner les 9 couples de valeurs de x et y exigées par l'énoncé.

524. Soit OA′, OB′ (fig. 2), les diamètres conjugués donnés; en résumant les raisonnements et les valeurs du n° 68, on se servira de la construction suivante :

Mener B′P perpendiculaire sur OA′, sur laquelle on portera B′E=B′D=O′A ; et les droites OA, OB, qui partageront 'angle EOD et son supplément en deux parties égales, indiqueront la direction des axes de l'ellipse. Pour détermi-

ner leur grandeur, il suffira de mener $B'h$ parallèle à OA, et de porter Eh de O en A et Oh de O en B.

Les foyers seront facilement déterminés aussitôt que les axes sont connus de grandeur et de position.

Au reste on peut déterminer les foyers directement par la construction du n° 68. Soit A', B', les demi-diamètres conjugués donnés; A, B, les demi-axes de l'ellipse. Afin de déterminer la longueur de la normale, à l'extrémité du diamètre OB', par exemple, on remarquera que la construction précédente donne

$$\frac{B'H}{B'E}=\frac{Oh}{hE};\quad \text{et dès lors}\quad B'H=N=\frac{B.A'}{A}.$$

D'où l'on peut conclure les théorèmes suivants :

La normale en un point quelconque de l'ellipse est une quatrième proportionnelle au grand axe, au petit axe et au diamètre conjugué de celui qui passe par le point donné.

Les normales aux divers points de l'ellipse sont proportionnelles aux diamètres conjugués relatifs à ces points.

Si du centre de l'ellipse on mène OR perpendiculaire à la tangente D'T, en désignant par d la distance du centre à la tangente, il est facile de voir qu'on aura $d=\frac{A.B}{A'}$; et, comparant cette valeur à la précédente, on tire $Nd=B^2$. Ce qui fournit l'énoncé de plusieurs théorèmes généraux, et entre autres :

Les distances du centre aux tangentes à l'ellipse sont réciproquement proportionnelles aux diamètres qui leur sont parallèles.

En désignant par r, r', les rayons vecteurs menés des foyers au point B, on a, d'après la propriété de l'ellipse,

$$(r+r')^2=4A^2,\quad \text{ou}\quad r^2+r'^2+2rr'=4A^2.$$

Or le triangle FB'F' donne $r^2+r'^2=2B'^2+2(A^2-B^2)$;

et, à cause de $A^2+B^2=A'^2+B'^2$, on obtient $rr'=A'^2$.

Les propriétés si connues des diamètres conjugués,

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2,\quad A'B'\sin\theta=AB,$$

se démontrent très aisément à l'aide des valeurs obtenues (nº 68) pour deux demi-diamètres conjugués quelconques :

$$A'=\frac{AB\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{A^2a^2+A^2}},\qquad B'=\frac{\sqrt{A^4a^2+B^4}}{\sqrt{A^2a^2+B^2}}.$$

On observera seulement que, θ désignant l'angle des diamètres conjugués dont les équations sont $y=ax$, $y=a'x$, $\left(aa'=-\frac{B^2}{A^2}\right)$, on a

$$\sin\theta=\frac{a-a'}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}.$$

Ce genre de démonstration est peut-être plus simple et plus direct.

Quoi qu'il en soit, les formules précédentes servent à simplifier l'expression du rayon de courbure $\rho=\frac{N^3}{p^2}$.

En effet, à cause de $p=\frac{B^2}{A}$, on aura

$$\rho=\frac{A'^3}{AB}=\frac{\left(\frac{A'^2}{B'}\right)}{\sin\theta}=\frac{rr'}{d},$$

ainsi qu'on l'a trouvé par une autre méthode (nº 521).

525. Soit

$$y^2=2px \tag{1}$$

l'équation de la parabole. La normale au point x, y, de la parabole, et passant par le point α, β, a pour équation

$$\beta-y=-\frac{y}{p}(\alpha-x); \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{p\beta - (p-\alpha)y}{y}.$$

Substituant dans l'équation (1), on a, pour déterminer l'ordonnée du point de rencontre de la normale et de la courbe, l'équation

$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0. \qquad (3)$$

Pour que cette équation ait deux racines égales, il faut et il suffit que son premier membre ait avec sa dérivée un commun diviseur du 1er degré. Sa dérivée est $3y^2 + 2p(p-\alpha)$. Effectuant les calculs, on trouve, d'après la méthode connue, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3) ait deux racines égales est

$$27p\beta^2 + 8(p-\alpha)^3 = 0.$$

Cette équation n'est autre chose que la développée de la parabole.

L'une des racines cherchées est donc

$$y_1 = \frac{3p\beta}{2(p-\alpha)};$$

son égale y_2 aura la même valeur; et la troisième racine, d'après la forme de l'équation (3), sera donnée par la relation $2y_1 + y_3 = 0$; d'où,

$$y_3 = -\frac{3p\beta}{(p-\alpha)}.$$

Or les tangentes des angles que font avec l'axe les normales à la courbe aux points dont les ordonnées sont y_1 et y_3 sont $-\frac{y_1}{p}$, $-\frac{y_3}{p}$: on aura donc pour déterminer le lieu géométrique demandé

$$1 + \frac{y_1}{p} \cdot \frac{y_3}{p} = 0.$$

Substituant pour y_1 et y_3 leurs valeurs, et réduisant, il vient

$$9\beta^2-2(\alpha-p)^2=0, \qquad (5)$$

équation de deux lignes droites

$$\beta=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}(\alpha-p).$$

L'élimination entre les équations (4) et (5) donne

$$\alpha=\frac{7}{4}p, \quad \beta=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}p=\frac{1}{4}p\sqrt{2}$$

pour les coordonnées des points cherchés.

Si l'on s'était proposé seulement de trouver le lieu géométrique des points de rencontre des normales perpendiculaires deux à deux, on aurait remarqué que, l'équation (3) donnant généralement les valeurs des trois ordonnées correspondantes aux trois normales, et la condition de perpendicularité étant $1+\frac{y_1y_2}{p^2}=0$, d'où $y_1.y_2=-p^2$, la valeur de la troisième ordonnée y_3 sera, d'après cette même équation (3), donnée par la relation

$$y_1y_2y_3=2p^2\beta; \text{ d'où } y_3=\frac{2p^2\beta}{y_1y_2}=-2\beta;$$

et, substituant cette valeur dans l'équation (3), on trouve

$$\beta[4\beta^2-p(2\alpha-3p)]=0.$$

Et par conséquent les lieux géométriques sont

$$\beta=0,$$

axe de la parabole;

$$\beta^2-\frac{p}{2}\left(\alpha-\frac{3}{2}p\right)=0,$$

équation d'une parabole ayant même axe que la proposée et dont le sommet est distant du sommet de la proposée d'une longueur égale à $\frac{3}{2}p$.

526. Courbe à peu près de la forme d'un 8, comprise entre les droites $x=0$, $x=a$, $y=\pm 1,86\,a$.

Le point d'inflexion est sur l'axe des abscisses, et correspond au point d'intersection de la circonférence et de la parabole, qui peuvent être considérées chacune comme le diamètre de la courbe. Il y a en outre un point conjugué, qui a pour abscisse $x=-a-\sqrt{2a^2}$.

527. Soit x', y' ; x'', y'', les coordonnées des points M', M'' (fig. 72), et satisfaisant à l'équation de la parabole donnée

$$y^2=2px\,, \tag{1}$$

de sorte qu'on a les relations

$$y'^2=2px', \qquad y''^2=2px''. \tag{2)(3}$$

Les perpendiculaires M'P, M''P, auront pour équations

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'), \tag{4}$$

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x''), \tag{5}$$

équations qui prennent la forme

$$yy'-y'^2+xx'-x'^2=0, \quad yy''-y''^2+xx''-x''^2=0\,,$$

et d'où l'on tire, par soustraction,

$$[y-(y'+y'')](y'-y'')+[x-(x'+x'')](x'-x'')=0.$$

Substituant dans cette équation la valeur de $\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{2p}{y'+y''}$, qu'on obtient en combinant les équations (2) et (3), on trouve

$$[y-(y'+y'')]\frac{2p}{y'+y''}+[x-(x'+x'')]=0.$$

Faisant $y''=y'$, pour exprimer que les deux perpendiculaires partent de deux points infiniment voisins de la courbe,

on a

$$(y-2y')=-\frac{y'}{p}(x-2x'). \qquad (a)$$

L'équation (4) prend la forme

$$2y-2y'=-\frac{y'}{p}(x-x'); \qquad (b)$$

et, soustrayant (a) de (b), on obtient

$$y'x'=-py. \qquad (c)$$

La combinaison des équations (a) et (c) donne

$$y'=\frac{3py}{2p-x}, \qquad x'=\frac{x-2p}{3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équatiou (2), on obtient, toute réduction faite, pour l'équation du lieu géométrique cherché,

$$27py^2=2(x-2p)^3, \qquad (G)$$

équation d'une parabole cubique, dont le sommet est à une distance de l'origine égale au paramètre de la parabole proposée.

On construira facilement cette équation en donnant à x des valeurs particulières.

Combinant entre elles les équations

$$y^2=2px, \qquad 27py^2=2(x-2p)^3,$$

on trouve, après réduction, pour déterminer les abscisses des points de rencontre des deux courbes, l'équation

$$x^3-6px^2-15p^2x-8p^3=0.$$

On reconnaît facilement que cette équation n'admet pour racine que la valeur $x=8p$, et par conséquent l'ordonnée correspondante $y=4p$; d'où l'on voit que la corde de section est égale à l'abscisse des points d'intersection.

528. Par le milieu H et K (fig. 73) des deux bases du

trapèze menez la droite HK, qui passera nécessairement par tous les centres des ellipses circonscrites. Soit O le centre d'une de ces ellipses; et OA', parallèle à AD et BC, la direction du diamètre conjugué à OKH.

Désignons par A', B', les longueurs des demi-diamètres dirigés suivant OA', OH; par θ l'angle B'OA'; et soit fait $BC=2B$, $AD=2b$, $HK=2d$; $OI=\alpha$, distance du centre de l'ellipse au milieu I de la droite HK : les coordonnées des points A et B seront

$$OP=b,\quad AP=\alpha+d;\quad OQ=B,\quad BQ=\alpha-d;$$

et l'on aura à rendre maximum ou minimum l'expression $\pi A'B'\sin\theta$, A' et B' étant déterminés par les relations

$$A'^2(\alpha+d)^2+B'^2b^2=A'^2B'^2,\quad A'^2(\alpha-d)^2+B'^2B^2=A'^2B'^2.$$

Ces expressions donnent

$$A'^2=\frac{B^2(\alpha+d)^2-b^2(\alpha-d)^2}{4d\alpha},\quad B'^2=\frac{B^2(\alpha+d)^2-b^2(\alpha-d)^2}{B^2-b^2},$$

et, par suite,

$$\pi^2A'^2B'^2\sin^2\theta=\pi^2\frac{[B^2(\alpha+d)^2-b^2(\alpha-d)^2]^2\sin^2\theta}{4(B^2-b^2)d\alpha};$$

d'où l'on voit que la plus grande valeur de $\pi^2A'^2B'^2\sin^2\theta$ sera donnée par $\alpha=d$; ce qui donne

$$A'=B,\ \text{ et dès lors }\ B'=\frac{2Bd}{\sqrt{B'^2-b^2}};$$

c'est-à-dire que le centre de l'ellipse maximum doit se trouver au milieu de la plus grande base du trapèze. Pour la surface maximum, on a

$$\pi A'B'\sin\theta=\frac{2\pi B^2d\sin\theta}{\sqrt{B^2-b^2}}.$$

530. R désignant le rayon du cercle (fig. 74), on a

$$BC=AC=R\sqrt{2},\quad AF=AE=2R\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right);$$

et dans le triangle ACF

$$\overline{CF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AF}^2 + 2AF.AG. \qquad (1)$$

Or AG=FG—AF; et, à cause de la similitude des triangles CGF (CG étant perpendiculaire à FA prolongé) et ACB, on a

$$\frac{CF}{FG} = \frac{AB}{BC \text{ ou } AC}; \text{ d'où } FG = \frac{CF.AC}{AB}.$$

Substituant cette valeur de FG dans AG, et celle-ci dans l'équation (1), remplaçant AF, AC, AB, par leurs valeurs, et réduisant, on obtient

$$CF = R[(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2\sqrt{2}-1}].$$

Effectuant les calculs on trouve, à 0,01 près,

$$CF = 1,76R.$$

Or le côté x du carré équivalent à πR^2 est égal à

$$R\sqrt{\pi} = R\sqrt{3,141592653589....}; \text{ d'où } x = R \times 1,7724538....;$$

C. Q. F. T.

M. Sonnet * a proposé la construction suivante, qui conduit à une approximation beaucoup plus grande et plus que suffisante dans la pratique : menez AT, tangente indéfinie, à l'extrémité du diamètre AB; prenez OI égal à la sixième partie du rayon OB; du point I, comme centre, avec un rayon égal au double du diamètre AB, décrivez un arc de cercle, qui coupera la tangente en un point H; joignez HB, qui coupera la demi-circonférence en un point K; la corde AK est le côté du carré équivalent au cercle, à moins d'une demi-unité du cinquième ordre décimal.

---

* *Nouvelle géométrie théorique et pratique, etc.*, excellent manuel que nous recommandons au lecteur.

En effet

$$\overline{AH}^2 = 16R^2 - \frac{49}{36}R^2 = \frac{527}{36}R^2,\quad HB = 4R^2 + \frac{527}{36}R^2 = \frac{671}{36}R^2;$$

et, à cause de la similitude des triangles AHB, AKB,

$$AK = 2R\sqrt{\frac{527}{671}} = R \times 1,7724502.$$

833. Soit pris pour axes rectangulaires deux droites passant, l'une, l'axe des coordonnées, par le point donné I, l'autre, l'axe des abscisses, par le point de concours A des droites données AB, AC (fig. 75).

Soit $OI = h$, $OA = d$; et, pour une sécante quelconque IQN, $IM = QN$; $MP = y$, $OP = x$.

La droite AB a pour équation	$x = d,$	(1)
La droite AC	$y = a(x - d),$	(2)
La sécante IQN	$y - h = Ax.$	(3)

On trouvera facilement, en combinant successivement l'équation (3) avec les équations (1) et (2), pour les coordonnées du point Q $x_1 = d,\quad y_1 = h + Ad;$

du point N $x_2 = \frac{h + Ad}{a - A},\quad y_2 = \frac{a(h + Ad)}{a - A},$

et par suite

$$QN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{h + Ad}{a - A}\sqrt{1 + A^2}.$$

On a d'ailleurs

$$IM = \sqrt{(y - h)^2 + x^2};$$

et, remplaçant A par sa valeur $\frac{y - h}{x}$, on trouvera

$$xy - ax^2 + dy - hd = 0, \qquad \text{(L)}$$

pour l'équation du lieu géométrique demandé.

Ce lieu géométrique est une hyperbole passant par le point fixe. On en trouvera facilement les asymptotes en

résolvant par rapport à y,

$$y=\frac{ax^2+dh}{x+d}=a(x-d)+d\left(\frac{h+ad}{x+d}\right).$$

Les équations des asymptotes sont donc

$$y=ax-d,\qquad x=-d,$$

c'est-à-dire la droite ACS, et une droite GA'T, parallèle à l'axe des y et à AB, et à la même distance que cette dernière droite par rapport à l'origine.

Connaissant les asymptotes et un point de l'hyperbole, on construira la courbe sans difficulté.

Si l'on transporte l'origine au point de rencontre des asymptotes, au point G, centre de la courbe, en faisant

$$x=x'-d,\qquad y=y'-2ad,$$

l'équation (L) devient

$$x'y'-ax'^2-dl=0;$$

car on peut remplacer $ad+h$ par la longueur $AH=l$, déterminée par l'intersection de AB avec la droite IH menée par le point I parallèlement à AC.

De plus, si l'on prend pour nouveaux axes coordonnés les asymptotes GS, GT, au moyen des formules

$$x'=x''\cos\alpha,\qquad y'=y''+x''\sin\alpha,$$

dans lesquelles α est déterminé par $\tang\alpha=a$, d'où

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\quad\text{et}\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

on obtiendra, toute réduction faite,

$$x''y''=\frac{ld}{\cos\alpha};$$

or

$$\frac{d}{\cos\alpha}=\frac{OA}{\cos OAR}=AR=l',$$

l'équation deviendra

$$x''y''=ll'=m^2,$$

en représentant par m une moyenne proportionnelle entre AR et AH.

534. L'origine des axes rectangulaires étant placée au centre de l'ellipse, dont les axes sont 2A et 2B, et b et a étant les coordonnées du point donné, les équations de l'ellipse et de la normale seront

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2, \qquad (1)$$

$$b-y=\frac{A^2y^2}{B^2x}(a-x), \qquad (2)$$

et les ordonnées du point d'intersection de la normale et de la courbe seront données par l'élimination entre ces deux équations.

L'équation (2) prend la forme

$$(A^2-B^2)xy-A^2ay+B^2bx=0, \qquad (3)$$

et représente une hyperbole équilatère, passant par le point donné, et ayant pour asymptotes deux droites parallèles aux axes de l'ellipse proposée. On pourra donc facilement construire cette hyperbole équilatère, et les points d'intersection des deux courbes donneront la solution du problème dans chaque cas particulier.

L'équation (3) donne

$$y=\frac{B^2bx}{A^2a-(A^2-B^2)x},$$

et, substituant dans l'équation (1), on obtiendra

$$A^2B^2b^2x^2+[A^2a-(A^2-B^2)x]^2x^2=A^2[A^2a-(A^2-B^2)x]^2, \qquad (E)$$

$$\left.\begin{array}{l}(A^2-B^2)^2x^4-2A^2a(A^2-B^2)x^3+A^2[A^2a+B^2b^2-(A^2-B^2)^2]x^2\\ \qquad +2A^4a(A^2-B^2)x-A^6a^2\end{array}\right\}=0. \qquad (F)$$

Cette équation (F) donnera les abscisses des points où les quatre normales rencontreront la courbe. On voit que le problème est susceptible de quatre solutions dans le cas le plus général.

De l'équation (E) on tire

$$x\sqrt{A^2B^2b^2+[A^2a-(A^2-B^2)x]^2}=\pm A[A^2a-(A^3-B^2)x].$$

On pourra extraire la racine carrée, si l'on a la relation $(A^2-B^2)^2(A^2B^2b^2+A^4a^2)=A^4a(A^2-B^2)^2$, d'où $b=0$, et par conséquent si le point donné est situé sur le grand axe de l'ellipse.

Dans cette hypothèse, on a

$$x=\frac{A^2a}{A^2-B^2};$$

et les points d'intersection de la normale et de la courbe se trouvent sur une droite perpendiculaire à l'axe des x, à une distance de l'origine exprimée par cette valeur, que l'on construira facilement de la manière suivante. F étant le foyer (fig. 76), menez BF et CI perpendiculaire sur BF. Alors

$$\frac{A^2}{A^2-B^2}=\frac{\overline{BF}^2}{\overline{CF}^2}=\frac{BF}{FI}, \quad \text{et} \quad x=\frac{BF}{FI}CP,$$

P étant le point donné; menez CGH parallèle à BF, FG et FH parallèles à CI et à CB; enfin joignez GP, et menez HK parallèle à GP : la droite NKN' sera la droite des points d'intersection, et les deux normales seront PN etPN'.

Dans le cas le plus général, les points d'intersection des normales et de l'ellipse seront donnés par la combinaison des équations (1) et (3).

Lorsque les deux courbes qu'elles représentent auront un même foyer, le problème pourra être résolu par la règle et le compas. Si l'on soumet cette condition au calcul, on trouve que le point donné par lequel on veut mener la normale à l'ellipe doit avoir une des positions indiquées par les valeurs suivantes de ses coordonnées

$$a_1=\frac{c^3}{3A^2}, \qquad b_1=-\frac{2c^3}{3B^2};$$

$$a_2=-\frac{c^3}{A^2}, \qquad b_2=\frac{2c^3}{B^2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer le calcul, qui présente peu de difficulté.

536. Soit

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \qquad (E)$$

l'équation générale des courbes du second degré, l'origine des axes rectangulaires étant en un point quelconque de son plan.

Si l'on veut exprimer que l'origine est au foyer que l'on considère, il faut et il suffit qu'en changeant convenablement la direction des axes au moyen des formules de transformation des coordonnées, qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système de même nature,

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

1° La distance d'un point quelconque de la courbe à l'origine soit exprimée en fonction rationnelle et linéaire de l'une ou de l'autre des coordonnées;

2° Que l'équation transformée soit ramenée à la forme

$$a'y'^2+c'x'^2+e'x'+f=0. \qquad (R)$$

Substituant les valeurs (F) dans l'équation (E), on obtient une transformée de la forme

$$a'y'^2+b'x'y'+c'x'^2+d'y'+e'x'+f=0, \qquad (T)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} a'&=a\cos^2\alpha-b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha,\\ b'&=b(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(a-c)\sin\alpha\cos\alpha,\\ c'&=a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha,\\ d'&=d\cos\alpha-e\sin\alpha,\\ e'&=d\sin\alpha+e\cos\alpha,\\ f&=f.\end{aligned}$$

Pour que l'équation (T) puisse être ramenée à la forme (R), il faut que l'on ait $b'=0$, $d'=0$; ce que l'on voit encore en exprimant que la distance d'un point de la courbe à l'ori-

gine est une fonction rationnelle et linéaire de l'abscisse de ce point; désignant par Δ cette distance, on aura

$$\Delta = \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2}}\sqrt{(a'-c')x'^2-e'x'-f}.$$

Et, pour exprimer la condition précédente, on aura la relation

$$e'^2+4f(a'-c')=0. \qquad \text{(M)}$$

Les équations $b'=0$, $d'=0$, $e'^2+4f(a'-c')=0$, démontrent que la connaissance d'un foyer équivaut à deux conditions; en effet ces trois équations renferment la quantité α, qui détermine la direction de l'axe, et les coefficients a, b, c, d, e, f, de l'équation (E) : l'élimination de α entre ces trois équations donne lieu à deux équations distinctes entre ces coefficients.

Cela posé, si l'on a pris pour axe des abscisses une droite parallèle à la droite donnée, l'équation de la tangente à la courbe (E) en un point x'', y'', de la forme connue

$$y-y''=-\left(\frac{by''+2cx''+e}{2ay''+bx''+d}\right)(x-x''),$$

doit pouvoir se ramener à la forme $y=$ constante : on aura donc à la fois

$$by''+2cx''+e=0, \quad y''=y;$$

d'où l'on tire

$$x''=-\left(\frac{by+e}{2c}\right);$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on obtient, toute réduction faite,

$$(b^2-4ac)y^2-2(2cd-be)y+(e^2-4cf)=0. \qquad \text{(N)}$$

Appliquons maintenant ces résultats successivement à chacune des équations du 2e degré.

Ellipse. — Si la courbe est une ellipse, l'équation de cette courbe, l'origine des axes rectangulaires étant au foyer négatif et l'axe des abscisses se confondant avec le grand axe,

est de la forme

$$A^2y^2+B^2(x+C)^2=A^2B^2.$$

Comparant cette équation avec l'équation (R), on a

$$\frac{c'}{a'}=\frac{B^2}{A^2},\quad \frac{e'}{c'}=2C.$$

Combinant ces équations avec l'équation de condition (M) trouvée précédemment, on en tire facilement

$$c'=-\frac{f}{B^2},\quad e'=-\frac{2Cf}{B^2},\quad a'=-\frac{A^2f}{B^4}.$$

On a donc les équations

$$d'=0,\quad e'=-\frac{2Cf}{B^2},\quad a'=-\frac{A^2f}{B^4},\quad b'=0,\quad c'=-\frac{f}{B^2}.$$

L'équation de l'axe sera

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \text{d'où}\quad \sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

x et y étant les coordonnées d'un des points d'intersection dont on cherche le lieu géométrique. A cause de cette dernière relation les équations précédentes prennent la forme

$$(dx-ey)=0,$$

$$dy+ex+\frac{2Cf}{B^2}\sqrt{x^2+y^2}=0.$$

$$a^2y^2+bxy+cx^2+\frac{f}{B^2}(x^2+y^2)=0,$$

$$ax^2-bxy+cy^2+\frac{A^2f}{B^4}(x^2+y^2)=0,$$

$$b(x^2-y^2)+2(a-c)xy=0.$$

Il ne reste plus qu'à tirer de ces équations les valeurs de a, b, c, d, e, et de les substituer dans la dernière équation de condition (N), et l'on obtiendra l'équation finale demandée *

$$(y^2-B^2)\sqrt{x^2+y^2}+2Cy^2=0. \qquad \text{(L)}$$

* Le calcul d'élimination doit être fait avec beaucoup de soin.

Passant aux coordonnées polaires en faisant $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, on obtiendra

$$(\pm\rho+C)=\pm\sqrt{C^2+\frac{B^2}{\sin^2\omega}}.$$

On discutera facilement cette courbe à quatre branches, qui a un point singulier à l'origine et pour asymptotes une double parallèle à la droite donnée à une distance du foyer égale au demi-petit axe.

Hyperbole. — Sans refaire les calculs, il suffit de changer B^2 en $-B^2$, et l'on obtient pour équation du lieu géométrique, en coordonnées rectangulaires,

$$(y^2+B^2)\sqrt{x^2+y^2}+2Cy^2=0\,;$$

en coordonnées polaires,

$$\pm\rho+C=\pm\sqrt{C^2-\frac{B^2}{\sin^2\omega}}.$$

Deux courbes fermées.

Parabole. — Pour le cas de la parabole, il faut que l'équation soit de la forme

$$y'^2-2p(x'+\tfrac{1}{2}p)=0,$$

ce qui donne $c'=0$, $\frac{e'}{f}=\frac{2}{p}$ et $b^2-4ac=0$.

On a donc les équations de condition

$d'=0$, $e'=\frac{2f}{p}$, $e'^2+4a'f=0$; d'où $a'=-\frac{f}{p^2}$, $c'=0$, $b'=0$,

qui représentent les équations développées

$$dx-ey=0,$$
$$dy+ex=\frac{2f\sqrt{x^2+y^2}}{p},$$
$$ax^2-bxy+cx^2+\frac{f}{p^2}(x^2+y^2)=0,$$
$$cx^2+ay^2+bxy=0,$$
$$b(x^2-y^2)+2(a-c)xy=0\,;$$

d'où l'on tirera les valeurs de a, b, c, d, e, pour les substituer dans l'équation (M), devenue

$$2(2cd-be)y-(e^2-4cf)=0.$$

On obtiendra, pour équation finale,

$$y^2-\frac{1}{2}p\sqrt{x^2+y^2}=0, \qquad (L')$$

équation assez remarquable par sa simplicité; et qui se réduit à l'équation plus simple encore, en coordonnées polaires,

$$\rho=\frac{1}{2}p\ \text{cosec}^2\omega.$$

l'axe fixe étant une parallèle à la droite donnée menée par le foyer de la parabole.

La courbe a aussi un point singulier au foyer, et se compose de deux branches.

538. Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \qquad (1)$$
$$A'y'^2+B'x'y'+C'x'^2+D'y'+E'x'+F'=0, \qquad (2)$$

les équations de deux courbes quelconques du 2ᵉ degré, situées d'une manière quelconque dans un même plan.

L'équation de la tangente en un point x, y, de la première, sera

$$2Ay'y+B(x'y+y'x)+2Cx'x+D(y'+y)+E(x'+x)+2F=0. \quad (T)$$

On exprime par les coordonnées courantes x', y', que cette droite est sécante à la seconde courbe.

Soit α, β, les coordonnées du point de rencontre des tangentes menées à cette seconde courbe (2) par les points d'intersection de la droite (T) et de la courbe elle-même, l'équation de la corde de contact sera

$$2A'\beta y'+B'(\alpha y'+\beta x')+2C'\alpha x'+D'(\beta+y')+E'(\alpha+x')+2F'=0. \qquad (P)$$

Cela posé, on exprimera que les droites (T) et (P) se con-

fondent, si, après avoir résolu par rapport à y' les deux équations de ces droites, on égale identiquement les coefficients; ce qui donne les relations

$$\frac{By+2Cx+E}{2Ay+Bx+D}-\frac{B'\beta+2C'\alpha+E'}{2A'\beta+B'\alpha+D'}=0, \quad (3)$$

$$\frac{Dy+Ex+2F}{2Ay+Bx+D}-\frac{D'\beta+E'\alpha+2F'}{2A'\beta+E'\alpha+D'}=0. \quad (4)$$

Faisant, pour abréger,

$$2A'\beta+B'\alpha+D'=\gamma,\quad B'\beta+2C'\alpha+E'=\delta,\quad D'\beta+E'\alpha+2F'=\varepsilon,$$

et tirant des équations (3) et (4) les valeurs de x et de y, on trouvera, toute réduction faite, en observant que le facteur γ est commun aux deux termes de chaque fraction, et supprimant ce facteur,

$$x=\frac{(BD-2AE)\varepsilon+(DE-2BF)\gamma-(D^2-4AF)\delta}{(B^2-4AC)\varepsilon+(BE-2CD)\gamma+(BD-2AE)\delta},$$

$$y=\frac{(BE-2CD)\varepsilon+(DE-2BF)\delta-(E^2-4CF)\gamma}{(B^2-4AC)\varepsilon+(BE-2CD)\gamma+(BD-2AE)\delta}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donnera l'équation du lieu géométrique demandé.

On prévoit facilement d'après la forme de ces valeurs que les facteurs γ, δ, ε, ne pourront dépasser le 2ᵉ degré dans l'équation finale, et comme ils sont eux-mêmes du 1ᵉʳ degré en α et β, l'équation du lieu géométrique représente une courbe du 2ᵉ degré.

Au surplus on peut effectuer le calcul de substitution après avoir mis les valeurs de x et de y sous une forme plus simple, en représentant par une seule lettre les coefficients des quantités γ, δ et ε.

540. 1° Prenons pour axes des coordonnées les droites extrêmes OB, OA; soit $BOA=\theta$, $COA=a$; p et q les coordonnées du point P. L'équation d'une sécante quelconque

telle que PMN, passant par le point P et par un point M de OBY, tel que OB$=\beta$, sera

$$y-\beta=\frac{q-\beta}{p}x;$$

et, faisant $y=0$, on aura $x_0=\text{ON}=\frac{p\beta}{\beta-q}$.

Cela posé, si, après avoir rabattu OM en Om, on mène mQ parallèle à OBY, et qu'on désigne par x', y', les coordonnées du point m, on aura, dans le triangle OmQ,

$$\frac{m\text{Q}}{\sin m\text{OQ}}=\frac{\text{OQ}}{\sin \text{O}m\text{Q}}=\frac{\text{O}m}{\sin m\text{QO}},$$

ou

$$\frac{y'}{\sin a}=\frac{x'}{\sin(\theta-a)}=\frac{\beta}{\sin\theta};$$

d'où

$$y'=\frac{b\sin a}{\sin\theta},\quad x'=\frac{b\sin(\theta-a)}{\sin\theta}.$$

L'équation de la droite Nm passant par les points N et m, dont les coordonnées sont exprimées par les valeurs précédentes, sera

$$\text{Y}=\frac{y'}{x'-\frac{p\beta}{\beta-q}}\left(\text{X}-\frac{p\beta}{\beta-q}\right).$$

Remplaçant x' et y' par leurs valeurs, on trouvera, toute réduction faite,

$$\text{Y}=\frac{(\beta-q)\sin a}{(\beta-q)\sin(\theta-a)-p\sin\theta}\left(\text{X}-\frac{p\beta}{\beta-q}\right). \qquad (1)$$

Pour une deuxième sécante telle que PM′N′, correspondante à OM′$=\beta'$, on aurait de même

$$\text{Y}=\frac{(\beta'-q)\sin a}{(\beta'-q)\sin(\theta-a)-p\sin\theta}\left(\text{X}-\frac{p\beta'}{\beta'-q}\right). \qquad (2)$$

Si l'on admet que toutes les sécantes telles que (1) et (2) passent par un même point, il faut que les coordonnées des

points d'intersection de deux quelconques de ces lignes soient indépendantes des valeurs de β, β', etc.

Egalant les valeurs de Y, on trouve

$$X = p + \frac{q\sin(\theta - a)}{\sin\theta};$$

d'où l'on tire

$$X - \frac{p\beta}{\beta - q} = q\left[\frac{(\beta - q)\sin(\theta - a) - p\sin\theta}{(\beta - q)\sin\theta}\right];$$

d'où par conséquent, à cause de l'équation (1),

$$Y = q\frac{\sin a}{\sin\theta}.$$

Ces valeurs de X et de Y étant indépendantes des quantités β, β', etc., la première partie du théorème est démontrée.

2° Pour construire ces valeurs, menez PR (fig. 78) parallèle à OBY; et, par le point R, RID parallèle à OC; rabattez par un arc de cercle RP sur RI, et menez IH parallèle à OBY. Dans le triangle RIH on a

$$\frac{RH}{RI} = \frac{\sin RIH}{\sin RHI} \quad \text{ou} \quad \frac{p + OH}{q} = \frac{\sin(\theta - a)}{\sin\theta},$$

$$\frac{IH}{RI} = \frac{\sin ERH}{\sin RHI} \quad \text{ou} \quad \frac{IH}{q} = \frac{\sin a}{\sin\theta};$$

d'où

$$OH = -p + \frac{q\sin(\theta - a)}{\sin\theta}, \quad \text{et} \quad IH = \frac{q\sin a}{\sin\theta}.$$

(Remarquez que p est négatif à cause de la position particulière du point P dans la figure adoptée.)

Le point I est donc le point demandé.

3° La valeur de Y, étant indépendante de p, montre que, si le point P parcourt une droite parallèle à OA (q restant constant), le lieu géométrique de tous les points I sera une parallèle à cette même droite, dont l'ordonnée sera la constante Y.

En outre, si l'on met les valeurs précédentes sous la forme

$$Y=\frac{q\sin a}{\sin\theta}, \qquad (X-p)=\frac{q\sin(\theta-a)}{\sin\theta},$$

on en tire, par la division,

$$Y=\frac{\sin a}{\sin(\theta-a)}(X-p),$$

équation d'une droite parallèle à OC et passant par le point R ($X_0=p$).

Cette relation, indépendante de q, fait voir que, si le point P parcourt la droite PR, tous les points I se trouveront sur la droite RID parallèle à OC.

4° Si le point P est donné sur la droite OB, il est évident que le point I se trouvera sur OC. Il en serait de même si le point donné se trouvait sur la droite OA.

Si le point P était situé sur la droite OC, la construction générale serait toujours applicable.

5° La valeur

$$X=p+\frac{q\sin(\theta-a)}{\sin\theta}$$

montre encore que X devient constante lorsque le point P est assujetti à rester constamment sur la droite

$$p+\frac{q\sin(\theta-a)}{\sin\theta}=c;$$

d'où

$$q=-\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-a)}(p-c);$$

et par conséquent lorsque le point P parcourt cette droite, le point I parcourt une droite parallèle à l'axe des Y.

6° Si le point P est assujetti à rester constamment sur un cercle $q^2+p^2+2pq\cos\theta=R^2$ ayant son centre au point O, le point I reste constamment sur une courbe du 2e degré.

545. La courbe est une hyperbole; $B^2-4AC>0$, et l'o-

rigine des coordonnées est un point de la courbe. Résolvant par rapport à x, et effectuant la division, on trouvera

$$x=\frac{1}{2}y+1+\frac{2}{y-2}.$$

Les équations des asymptotes sont donc $y=2$, parallèle à l'axe des x; $x=\frac{1}{2}y+1$, droite qu'on déterminera sans difficulté. Les asymptotes étant connues et l'origine étant un point de la courbe, l'hyperbole sera construite facilement.

Les coordonnées du centre sont $x=2$, $y=2$.

Si l'on résout l'équation proposée par rapport à y, on trouvera

$$y=x\pm\sqrt{x^2-4x}.$$

On voit que le diamètre transverse de l'hyperbole conjugué à l'axe des y partage l'angle des axes en deux parties égales. Les abscisses des points extrêmes de ce diamètre seront $x=0$, $x=4$; et par conséquent le centre aura pour coordonnées $x=2$, $y=2$: ce qu'on savait déjà.

Pour déterminer l'autre axe, on prendra la valeur réelle du radical correspondante à $x=2$, ce qui donne 2 pour la longueur du demi-diamètre non transverse.

La longueur du diamètre transverse sera évidemment représentée par $\sqrt{x(-x')^2+(y-y')^2}$, expression dans laquelle on fera $x=2$, $y=2$, $x'=0$, $y'=0$, et qui donnera $2\sqrt{2}$ pour la longueur du demi-diamètre transverse.

On pourrait dès lors déterminer facilement les axes, puisqu'on connaît un système de diamètres conjugués de grandeur et de position, ou bien construire directement la courbe.

Mais on peut déterminer directement la longueur u demi-axe transverse en cherchant le minimum de la distance du centre à la courbe dont l'équation est donnée.

Soit d la distance du centre x', y', à un point quelconque x, y, de la courbe proposée, dont l'équation est

$$y^2-2xy+4x=0;$$

désignant par a la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe des abscisses, on aura les relations

$$y-y'=a(x-x'),\quad (y-y')^2+(x-x')^2=d^2;$$

d'où l'on tire

$$x=x'+\frac{d}{\sqrt{1+a^2}},\quad y=y'+\frac{ad}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Or, on a trouvé pour x' et y' les valeurs $x'=2$, $y'=2$; substituant les valeurs de x et de y dans l'équation de la courbe, on trouvera, toute réduction faite,

$$a=\frac{d^2\pm\sqrt{(d^2-2)^2-20}}{d^2+4}.$$

La plus petite valeur de d sera donnée par la relation $(d^2-2)^2-20=0$; d'où l'on tire $d^2=2+2\sqrt{5}$, et par suite

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc à la fois la direction de l'axe transverse et la longueur de ce demi-axe, qui est, en la désignant par A,

$$A=\sqrt{2+2\sqrt{5}}.$$

On serait arrivé au même résultat par les formules de transformation. En effet, on transporte d'abord l'origine au centre en faisant $x=x'+p$, $y=y'+q$, ce qui donne pour première transformée

$$y'^2-2x'y'+4=0, \qquad (2)$$

et $y'=2$, $x'=2$, ce qu'on savait déjà. Ensuite substituant dans l'équation (2) les formules

$$y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha,\quad x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha,$$

on obtient

$$\tang\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

d'où

$$\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

et pour dernière transformée

$$2\sqrt{5}\,y''^2+(5-3\sqrt{5})x''^2+2(10-2\sqrt{5})=0.$$

En faisant $y''=0$, on trouve $x''=\sqrt{2+\sqrt{5}}$,

$$x''=0,\quad \ldots \quad y''=\sqrt{-1}\sqrt{2\sqrt{5}-1}.$$

545. L'énoncé du problème revient à celui-ci. On mène à une parabole donnée toutes ses tangentes, autour de chacune desquelles on suppose que la courbe fait une demi-révolution : quel est le lieu géométrique des sommets pour chaque position de la parabole rabattue sur le même plan.

Soit TM une des tangentes à la parabole donnée ; si, par le sommet A, on mène la perpendiculaire AI, et qu'on la prolonge de IA'=IA, le point A' sera une des positions du sommet de la parabole rabattue sur son plan après une demi-révolution.

Soit x, y, les coordonnées du point I, lesquelles seront déterminées aisément par les équations

$$yy'=p(x+x'),\qquad y=-\frac{y'}{p}x,$$

de la tangente à la parabole et de la perpendiculaire abaissée sur elle du sommet. En effet, on en tire

$$x=-\frac{p^2x'}{y'^2+p^2},\qquad y=\frac{px'y'}{y'^2+p^2}.$$

Cela posé, soit α, β, les coordonnées du point A' : on aura évidemment $\alpha=2x$, $\beta=2y$; et par conséquent

$$\alpha=-\frac{2p^2x'}{y'^2+p^2},\qquad \beta=\frac{2px'y'}{y'^2+p^2};$$

et l'on a en outre

$$y'^2=2px'.$$

Eliminant x' et y' entre ces trois équations, on obtiendra

$$\beta^2=-\frac{\alpha^3}{p+\alpha},$$

équation d'une cissoïde renversée dont le pôle est au sommet de la parabole donnée et dont le diamètre du cercle générateur est égal au demi-paramètre.

549. Soit

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes;

$$A^2yy'+B^2xx'=A^2B^2$$

l'équation de la tangente en un point x', y';

$$y=\frac{A^2y'}{B^2x'}(x-d)$$

l'équation de la perpendiculaire menée à la tangente du point D $(d, 0)$ donné sur l'axe.

Les coordonnées du point de rencontre de la tangente et de la perpendiculaire seront

$$x=\frac{A^2(B^4x'+A^2y'^2d)}{A^4y'^2+B^4x'^2},\quad y=\frac{A^2B^2y'(A^2-dx')}{A^4y'^2+B^4x'^2}.$$

Si α, β, représentent les coordonnées du point D' qui correspond au point D après le rabattement, on aura

$$y=2\beta,\qquad \alpha+d=2x,$$

et par conséquent

$$\beta=\frac{2A^2B^2y'(A-dx')}{A^4y'^2+B^4x'^2}, \tag{1}$$

$$\alpha+d=\frac{2A^2(B^4x'+A^2y'^2d)}{A^4y'^2+B^4x'^2}, \tag{2}$$

et en même temps

$$A^2y'^2+B^2x'^2=A^2B^2, \tag{3}$$

entre lesquelles équations il ne reste plus qu'à éliminer x', y', pour avoir la relation entre α et β, c'est-à-dire l'équation du lieu géométrique demandé.

Comme le calcul d'élimination présente quelques difficultés, nous indiquerons une marche assez simple.

Divisant (1) par (2), on obtient

$$\frac{\beta}{\alpha+d}=\frac{B^2y'(A^2-dx')}{B^4x'+A^2y'^2d};$$

d'où l'on tire

$$x'=\frac{A^2y'[B^2(\alpha+d)-d\beta y']}{B^2[B^2\beta+d(\alpha+d)y']}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), on trouve, en ayant égard aux réductions qui se présentent dans le courant du calcul,

$$y'=\frac{2B^2\beta}{\beta^2+\alpha^2-d^2}.$$

La substitution de cette valeur de y' dans l'expression précédente de x' donne

$$x'=\frac{2A^2(\alpha-d)}{\beta^2+\alpha^2-d^2}.$$

Enfin substituant ces valeurs de x' et de y' dans l'équation (3), on obtient

$$4B^2\beta^2+4A^2(\alpha-d)^2=(\beta^2+\alpha^2-d^2)^2. \qquad \text{(F)}$$

Il ne reste plus qu'à faire dans cette équation les différentes hypothèses sur la valeur de d.

1° Si $d=0$, on a $4B^2\beta^2+4A^2\alpha^2=(\beta^2+\alpha^2)^2$ pour l'équation du lieu géométrique des diverses positions du centre de l'ellipse après le rabattement. Développant et résolvant, on trouve, en faisant $A^2-B^2=c^2$,

$$\beta^2=2B^2-\alpha^2\pm2\sqrt{c^2\alpha^2+B^4}.$$

L'équation en coordonnées polaires

$$\rho=\pm2\sqrt{A^2-c^2\sin^2\omega}$$

permet de juger plus facilement de la forme de la courbe.

2° Si $d=A$, l'équation (F) devient

$$4B^2\beta^2+4A^2(\alpha-A)^2=(\beta^2+\alpha^2-A^2).$$

Développant et résolvant, on trouve

$$\beta^2 = -[\alpha^2-(A^2+2B^2)] \pm \sqrt{(\alpha^2-A^2+2B^2)^2-(\alpha^2-A^2)^2+4A^2(\alpha-A)^2},$$

équation d'une courbe qui représente le lieu géométrique des diverses positions du sommet après le rabattement.

3° Enfin si $d=c=\sqrt{A^2-B^2}$, abscisse du foyer, l'équation (F) devient

$$4B^2\beta^2+4A^2(\alpha-c)^2=(\beta^2+\alpha^2-c^2)^2,$$

et se décompose en deux facteurs de la manière suivante:

$$[\beta^2+\alpha^2-c^2-2B^2-2(c\alpha-A^2)]\,[\beta^2+\alpha^2-c^2-2B^2+2(c\alpha-A^2)]=0;$$

et plus simplement encore

$$[\beta^2+(\alpha-c)^2]\times[\beta^2+(\alpha+c)^2-4A^2]=0.$$

Le premier facteur, égalé à zéro,

$$\beta^2+(\alpha-c)^2=0,$$

représente le foyer lui-même et ne présente qu'une solution insignifiante.

Le deuxième, $\beta^2+(\alpha+c)^2-4A^2=0$, représente une circonférence qui a pour centre l'autre foyer et dont le rayon est égal au grand axe, résultat qu'il était facile de prévoir.

553. Soit MN, PQ et A (fig. 79), les droites et les points donnés; prenons pour axe des x la droite MN et pour axe des y la perpendiculaire OY élevée sur MN par le point d'intersection O des droites données; soit C le centre du cercle demandé; faisons $OI=\alpha$, $CI=\beta$, $CD=\rho$, $OB=p$, $AB=q$, $DE=2l$, $FG=l'$. On aura pour équations de condition

$$(\beta-p)^2+(\alpha-q)^2=\rho^2, \qquad (1)$$

$$\beta^2+l^2=\rho^2, \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\beta-a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 l'^2=\rho^2. \qquad (3)$$

Retranchant successivement (2) de (1) et (3) de (2), on trouvera, toute réduction faite,

$$(\alpha-p)^2-2\beta q+q^2-l^2=0, \qquad \text{(F)}$$

$$\beta^2+\frac{2}{a}\alpha\beta-\alpha^2+\frac{(l^2-l'^2)}{\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}=0. \qquad \text{(F')}$$

Il ne resterait plus qu'à éliminer entre ces équations pour déterminer les coordonnées du centre du cercle cherché; mais cette élimination devant produire une équation finale du 4e degré, généralement non décomposable en facteurs du second, du moins immédiatement, il sera préférable de construire chacune des deux courbes représentées par les équations (F) et (F').

L'équation (F) représente une parabole dont le sommet a pour coordonnées $\alpha=p$, $\beta=\frac{q^2-l^2}{q}$; pour paramètre $2q$, et dirigée suivant l'axe des y. En effet, cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\alpha-p)^2-2q\left(\beta-\frac{(q^2-l^2)}{q}\right)=0.$$

Quant à l'équation (F'), elle représente évidemment une hyperbole équilatère rapportée à son centre, mais non à ses diamètres principaux. Pour la rapporter à ses axes on fera

$$\alpha=\alpha'\cos A-\beta'\sin A, \qquad \beta=\alpha'\sin A+\beta'\cos A;$$

et l'on obtiendra

$$\operatorname{tang} 2A=-\frac{1}{a};$$

et pour l'équation transformée

$$\beta'^2-\alpha'^2+\frac{(l^2-l'^2)}{\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)}=0.$$

La relation $\operatorname{tang} 2A=-\frac{1}{a}$ fait voir que l'axe transverse de

l'hyperbole partage en deux parties égales l'angle que font entre elles la droite MN et une perpendiculaire à la droite PQ. De plus, à cause de $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\cos 2A$, l'équation de l'hyperbole prend la forme

$$\beta'^2-\alpha'^2=-\frac{\sqrt{l^2-l'^2}}{\cos 2A}\cdot\sqrt{l^2-l'^2},$$

et l'on construira facilement la moyenne proportionnelle indiquée dans le second membre.

Toutes ces constructions se résument dans la solution suivante, qui correspond au cas le plus général.

1° Sur AB (fig. 80) décrire une demi-circonférence; prendre $AU=l$ et mener US perpendiculaire à AB. S sera le sommet de la parabole : en effet

$$SB=AB-AS=q-\frac{l^2}{q}=\frac{q^2-l^2}{q}.$$

Connaissant la direction de l'axe SA, le sommet S et le paramètre $2q$, on construira la parabole.

2° Au point O, élevez OH perpendiculaire à PQ, et divisez l'angle HON en deux parties égales par la droite OY, qui sera la direction du nouvel axe des x de l'hyperbole; OY′ perpendiculaire à OY sera la direction du nouvel axe des y.

Pour construire

$$\frac{\sqrt{(l^2-l'^2)}}{\cos 2A}(l^2-l'^2),$$

prenez, sur OY′, $OV=l'$ et $VT=l$, $OT=\sqrt{l^2-l'^2}$. Portez OT en OT′, et élevez T′Z′, qui rencontre OH en Z′ :

$$OZ'=-\frac{\sqrt{l^2-l'^2}}{\cos 2A}.$$

Rabattez OZ′ en OZ; et sur TZ décrivez une demi-circonférence, qui rencontre OY′ en I : OI sera le demi-axe de l'hyperbole, laquelle est dirigée dans le sens des y.

La rencontre des deux courbes déterminera le centre du cercle cherché.

Le problème pourra avoir 4, 3, 2, 1, 0, solutions.

Si $l=0$, le cercle doit être tangent à la droite MN, et le problème a pour énoncé : Décrire un cercle qui passe par un point donné, qui touche une droite donnée et coupe une seconde droite donnée sous une corde donnée. La solution précédente s'applique à ce cas particulier.

Si l'on a à la fois $l=0$, $l'=0$, le problème répond à l'énoncé : Décrire un cercle passant par un point donné tangentiellement à deux droites donnés. Problème facile à résoudre directement.

Au lieu du point donné on peut donner une droite à laquelle le cercle soit assujetti à être tangent; etc.

556. Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=1, \qquad (1)$$

$$A'y^2+B'xy+C'x^2=1, \qquad (2)$$

les équations des deux courbes rapportées à leur centre commun et à deux axes quelconques.

Si l'on cherche les points d'intersection de ces courbes, on trouve, par la soustraction,

$$(A-A')y^2+(B-B')xy+(C-C')x^2=0, \qquad (3)$$

équations de deux droites passant par l'origine : d'où il résulte que les quatre points d'intersection forment un parallélogramme ABCD (fig. 81).

Par conséquent les droites OX, OY, menées par le centre parallèlement aux côtés du parallélogramme, forment un système de diamètres conjugués commun aux deux courbes.

Si l'on rapporte les courbes proposées à ce système de diamètres conjugués, les équations des courbes seront de

la forme

$$Aq^2+Cp^2=1, \qquad (c)$$

$$A'q'^2+C'p'^2=1. \qquad (c')$$

et les tangentes à ces courbes aux points (p, q) de la première, $(p'\ q')$ de la seconde, seront

$$Aqy+Cpx=1, \qquad (T)$$

$$A'q'y+C'p'x=1. \qquad (T')$$

Si l'on veut que ces deux équations représentent une seule et même droite, il faut et il suffit que les constantes de ces équations soient égales, ce qui donne les équations de condition

$$Aq=A'q', \qquad (d)$$

$$Cp=C'p'. \qquad (d')$$

Il ne reste donc plus qu'à éliminer entre les équations (c), (c'), (d), (d'), afin de déterminer p, q, et p', q', qui, substitués dans l'une ou l'autre des équations (T) et (T'), devront donner exactement le même résultat. Des équations (d) et (d') on tire les valeurs de q' et p', qui, substituées dans l'équation (c'), donnent

$$\frac{A^2}{A'}q^2+\frac{C^2}{C'}p^2=1.$$

Eliminant enfin entre cette équation et l'équation (c), on obtient les valeurs de p et q, et par conséquent pour l'équation de la tangente commune

$$y=\mp\sqrt{\frac{CC'(A-A')}{AA'(C'-C)}}\,x\pm\sqrt{\frac{AC'-A'C}{AA'(C'-C)}}. \qquad (F)$$

Si l'on retranche les équations (c) et (c') l'une de l'autre on trouve

$$(A-A')q^2-(C'-C)p^2=0,$$

d'où

$$(q\sqrt{A-A'}+p\sqrt{C'-C})(q\sqrt{A-A'}-p\sqrt{C'-C})=0.$$

Et les équations des droites qui joignent les points d'intersection des courbes proposées sont renfermées dans l'équation

$$q = \mp \frac{\sqrt{C'-C}}{\sqrt{A-A'}} p. \qquad \text{(I)}$$

Les droites (F) et (I) seront parallèles lorsqu'on aura la relation

$$\frac{CC'(A-A')}{AA'(C'-C)} = \frac{C'-C}{A-A'};$$

d'où l'on tire

$$(AC-A'C')(AC'-A'C)=0,$$

relation qui est satisfaite soit par $(AC-A'C')=0$, soit par $(AC'-A'C)=0$; d'ou l'on tire

$$\frac{A}{A'} = \frac{C'}{C}, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'},$$

ce qui indique 1° que les courbes doivent être de même espèce, ellipses ou hyperboles; 2° que ces deux courbes doivent être égales ou semblables.

En général les quatre tangentes représentées par l'équation (F) sont parallèles deux à deux, et forment un parallélogramme circonscrit, dont les diagonales sont dirigées suivant les diamètres conjugués communs aux deux courbes.

Si l'on veut faire l'application de cette théorie à l'ellipse et à la circonférence concentriques représentées par les équations

$$q^2+p^2=r^2, \qquad a^2q'^2+b^2p'^2=a^2b^2,$$

il suffira de substituer dans l'équation (F) les valeurs

$$A=\frac{1}{r^2}, \quad A'=\frac{1}{b^2}; \quad C=\frac{1}{r^2}, \quad C'=\frac{1}{a^2};$$

et l'on trouvera

$$y = \mp \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}} x \pm \frac{r\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}. \qquad \text{(F')}$$

Il est facile de se convaincre que les tangentes communes

ne sont pas parallèles aux cordes de section. En effet, ces cordes ont pour équations

$$q = \pm \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} p,$$

et par conséquent pour qu'elles fussent parallèles, il faudrait qu'on eût la relation

$$\frac{r^2-b^2}{a^2-r^2} = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2-r^2}{r^2-b^2}\right);$$

d'où l'on tire

$$r^2 = ab.$$

Il faudrait donc que le rayon du cercle fût une moyenne proportionnelle entre les demi-axes de l'ellipse.
La droite (F′) rencontre l'axe des x en un point dont l'abscisse est

$$x_0 = \frac{r\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{r^2-b^2}},$$

et l'axe des y en un point dont l'ordonnée est

$$y_0 = \frac{r\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Construction. — Menez BI parallèle à OX (fig. 82), $BI = \sqrt{r^2-b^2}$; déterminez le foyer F, $OF = \sqrt{a^2-b^2}$. Donc, portez BI=OH en OG; joignez GF, et menez DN parallèle à GF : le point N est tel que $ON = x_0$. Il n'y aura plus qu'à mener par le point N une tangente au cercle: cette droite sera en même temps tangente à l'ellipse.

564. Soit ABC (fig. 83) le triangle proposé, et XY la droite qui opère la division du triangle de manière que l'on ait

$$\frac{AYX}{BXYC} = \frac{m}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{AXY}{ABC} = \frac{m}{m+n}.$$

Désignons par a, b, c, les côtés du triangle opposés aux an-

gles A, B, C; par x et y les distances inconnues AX, AY, qui détermineront la droite XY; cette première condition sera exprimée par

$$xy = \frac{m}{m+n}bc. \qquad (1)$$

Soit G et g les centres de gravité des triangles ABC, AXY; le centre de gravité du quadrilatère BXYC se trouvera nécessairement sur la droite Gg, laquelle, d'après la seconde condition de l'énoncé, doit être perpendiculaire à XY; or si l'on mène les droites AGM, Agm, les points M et m seront les milieux des droites BC, XY; et comme, d'après la propriété des points G et g, on a

$$\text{GM} = \frac{1}{3}\text{AM}, \qquad gm = \frac{1}{3}\text{A}m,$$

et par conséquent

$$\frac{\text{GM}}{gm} = \frac{\text{AM}}{\text{A}m},$$

la droite Mm sera parallèle à Gg, et par conséquent aussi perpendiculaire à XY; les distances XM, YM, seront donc égales.

Désignant par l la longueur de la droite médiane AM; par α, β, les angles BAM, CAM, on aura

$$\overline{\text{XM}}^2 = l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha, \qquad \overline{\text{YM}}^2 = l^2 + y^2 - 2ly\cos\beta,$$

et par suite

$$y^2 - x^2 - 2ly\cos\beta + 2lx\cos\alpha = 0,$$

équation qui prend la forme

$$(y - l\cos\beta)^2 - (x - l\cos\alpha)^2 = -l^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)^2. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2), qui serviront à déterminer les distances AX, AY, représentent, comme on le voit, deux hyperboles, dont la première, rapportée aux droites AB, AC, comme asymptotes, a pour puissance $\frac{m}{m+n}bc$, quantité que l'on peut exprimer facilement par un carré k^2; la seconde

est une hyperbole équilatère rapportée à un système de diamètres conjugués parallèles aux côtés AB, AC, et dont le centre a pour coordonnées $x_o = l\cos\alpha$, $y_o = l\cos\beta$. Les points d'intersection des deux hyperboles résoudront le problème.

Au surplus on peut déterminer séparément chacune des valeurs de x et de y; en effet l'élimination de y entre les équations (1) et (2) donne

$$x^4 - 2l\cos\alpha\, x^3 + 2l\cos\beta\, k^2 x - k^4 = 0, \qquad (3)$$

équation du 4e degré, dont le dernier terme est essentiellement négatif, et qui aura toujours par conséquent au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative. En substituant dans l'équation (1) chacune des valeurs de x tirées de l'équation (3), on obtiendra la valeur correspondante de y. Il est évident qu'on devra rejeter les valeurs négatives de x et de y, ainsi que les valeurs positives de x plus grandes que c, et de y plus grandes que b.

Si le triangle est isocèle, on a $b = c$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}A$, et l'équation (2) se réduit à

$$(y - l\cos\tfrac{1}{2}A)^2 - (x - l\cos\tfrac{1}{2}A)^2 = 0. \qquad (4)$$

Par conséquent les valeurs de x et de y seront données par la combinaison des équations

$$y = x, \qquad xy = k^2;$$
$$y + x = 2l\cos\tfrac{1}{2}A, \qquad xy = k^2.$$

On observera que $l = b\cos\frac{1}{2}A = c\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Enfin si le triangle est équilatéral, on a $c = b = a$, et $\cos\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

871. 1° Soit OX, OY, les droites données, faisant entre elles un angle quelconque θ, prises pour axes des coordonnées. Désignons par $c + d$ la longueur donnée de la droite mobile HH', et prenons sur cette droite le point M tel que

$MH=c$, $MH'=d$, l'extrémité H étant sur l'axe des abscisses OX et l'autre extrémité H' sur l'axe des ordonnées OY.

Si par le point M on mène MP parallèle à l'axe des ordonnées, et qu'on fasse $OP=x'$, $MP=y'$, on trouvera facilement pour les valeurs de OH, OH',

$$OH=\frac{(c+d)x'}{d},\quad OH'=\frac{(c+d)y'}{c}.$$

D'après une formule connue de trigonométrie

$$\overline{HH'}^2=\overline{OH}^2+\overline{OH'}^2-2OH.OH'\cos HOH'\ ;$$

substituant pour ces droites leurs valeurs, et réduisant,

$$\frac{y'^2}{d^2}+\frac{x'^2}{c^2}-\frac{2x'y'\cos\theta}{cd}-1=0, \qquad \text{(L)}$$

équation du lieu géométrique des points M. Cette courbe est évidemment une ellipse. On a en effet

$$B^2-4AC=-4(1-\cos^2\theta)=-4\sin^2\theta,$$

quantité essentiellement négative.

2° En général, lorsque les coordonnées sont obliques, le rapport des sinus des angles que la tangente en un point x', y', fait avec les axes, est exprimé par le quotient de la dérivée par rapport à x', divisée par la dérivée par rapport à y', ce quotient étant pris négativement. Désignant ce rapport des sinus par a, on aura

$$a=-\frac{c}{d}\left(\frac{cx'-dy'\cos\theta}{dy'-cx'\cos\theta}\right).$$

Si l'on désigne par a' le rapport des sinus des angles que la normale au même point de la courbe fait avec les axes des coordonnées, on devra avoir entre a et a' la relation de perpendicularité

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

d'où

$$a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta},$$

et par conséquent, à cause de la valeur précédente de a,

$$a'=\frac{d(d+c\cos^2\theta)y'-c(c+d)\cos\theta x'}{c(c+d\cos^2\theta)x'-d(c+d)\cos\theta y'}.$$

L'équation de la normale au point x', y', sera donc

$$y-y'=\frac{d(d+c\cos^2\theta)y'-c(c+d)\cos\theta x'}{c(c+d\cos^2\theta)x'-d(c+d)\cos\theta y'}(x-x'). \qquad \text{(N)}$$

La perpendiculaire à l'axe des x au point H, dont les coordonnées sont $\left(\frac{(c+d)x'}{d}, 0\right)$, a pour équation

$$y=-\frac{1}{\cos\theta}\left(x-\frac{(c+d)x'}{d}\right);$$

et la perpendiculaire à l'axe des y au point H', dont les coordonnées sont $(0, \frac{(c+d)y'}{c})$, a pour équation

$$y-\frac{(c+d)y'}{c}=-\cos\theta x.$$

On trouvera facilement pour les coordonnées du point de rencontre I de ces deux droites

$$x=\frac{(c+d)}{cd\sin^2\theta}(cx'-dy'\cos\theta), \quad y=\frac{(c+d)}{cd\sin^2\theta}(dy'-cx'\cos\theta);$$

d'où l'on tire

$$x-x'=\frac{c(c+d\cos^2\theta)x'-d(c+d)\cos\theta y'}{cd\sin^2\theta},$$

$$y-y'=\frac{d(d+c\cos^2\theta)y'-c(c+d)\cos\theta x'}{cd\sin^2\theta}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente de la normale (N), on voit aisément qu'elle est satisfaite. Donc les deux perpendiculaires et la normale concourent en un même point.

3° Des valeur précédentes de x et y on tire

$$x'=\frac{d}{c+d}(x+y\cos\theta), \qquad y'=\frac{c}{c+d}(y+x\cos\theta);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (L), on obtient

$$y^2+2xy\cos\theta+x^2=\left(\frac{c+d}{\sin\theta}\right)^2,$$

équation d'une circonférence ayant pour centre le sommet de l'angle des droites données et dont le rayon est l'hypothénuse du triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est perpendiculaire à l'axe des x et égal à la longueur $(c+d)$ constante et donnée.

573. Soit x, y, z, les trois côtés du triangle cherché ; ξ_1, φ_1, et ξ_2, φ_2, les coordonnées des centres de gravité du contour et de la surface, rapportées à deux des côtés du triangle, y et z par exemple, pris pour axes, et comprenant l'angle θ : il s'agit de trouver la condition qui doit rendre maximum la valeur

$$\Delta^2=(\xi_1-\xi_2)^2+(\varphi_1-\varphi_2)^2+2(\xi_1-\xi_2)(\varphi_1-\varphi_2)\cos\theta.$$

D'après le théorème des moments on aura pour déterminer le centre de gravité du contour

$$\xi_1(x+y+z)=x.\frac{1}{2}z+z.\frac{1}{2}z,\quad \varphi_1(x+y+z)=x.\frac{1}{2}y+y.\frac{1}{2}y;$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\xi_1=\frac{1}{2}z-\frac{\frac{1}{2}yz}{x+y+z},\quad \varphi_1=\frac{1}{2}y-\frac{\frac{1}{2}yz}{x+y+z}.$$

Et, si l'on représente par $2p$ le contour et par S la surface du triangle demandé, on aura, à cause de $x+y+z=2p$, $\frac{1}{2}yz\sin\theta=S$,

$$\xi_1=\frac{1}{2}z-\frac{S}{2p\sin\theta},\quad \varphi_1=\frac{1}{2}y-\frac{S}{2p\sin\theta}.$$

D'ailleurs les coordonnées du centre de gravité de la surface sont $\xi_2=\frac{z}{3}$, $\varphi_2=\frac{y}{3}$, d'où l'on tire

$$\xi_1-\xi_2=\left(\frac{1}{6}z-\frac{S}{2p\sin\theta}\right),\quad \varphi_1-\varphi_2=\left(\frac{1}{6}y-\frac{S}{2p\sin\theta}\right),$$

et par conséquent l'expression de Δ^2 deviendra

$$\Delta^2=\left(\frac{1}{6}z-\frac{S}{2p\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{6}y-\frac{S}{2p\sin\theta}\right)^2+2\left(\frac{1}{6}z-\frac{S}{2p\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{6}y-\frac{S}{2p\sin\theta}\right)\cos\theta.$$

La valeur Δ^2 sera évidemment la plus grande possible pour $\sin\theta=1$, d'où $\theta=100$ et $\cos\theta=0$.

De plus la valeur résultante

$$\Delta^2=\left(\frac{1}{6}z-\frac{S}{2p}\right)^2+\left(\frac{1}{6}y-\frac{S}{2p}\right)^2$$

sera un maximum pour $z=y$: donc le triangle demandé est le triangle rectangle isocèle.

Pour déterminer la valeur de Δ^2, on aura

$$\Delta^2=2\left(\frac{1}{6}z-\frac{S}{2p}\right)^2;$$

mais on a $y=z$, $yz=2S$; d'où $z=\sqrt{2S}$; et enfin

$$\Delta^2=2\left(\frac{1}{6}\sqrt{2S}-\frac{S}{2p}\right)^2.$$

On peut exprimer la valeur de Δ^2 en fonction du contour donné. En effet, d'après la nature du triangle isocèle rectangle on a $z=y$ et $x=y\sqrt{2}$; d'où, à cause de $x+y+z=2p$ et de $y=z=\sqrt{2S}$, on obtient

$$S=\frac{2p^2}{(2+\sqrt{2})^2},$$

et dès lors

$$\Delta=\frac{1}{12}p\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)^2}.$$

On voit facilement que la valeur minimum de Δ est zéro, et que le triangle est équilatéral. En effet, si l'on exprime que les centres de gravité du contour et de la surface coïncident, on aura, en égalant les valeurs de ξ_1 et ξ_2, φ_1, φ_2,

$$z+x-2y=0,\quad x+y-2z=0;$$

d'où l'on tire $z=y$, et par conséquent $x=y=z$ indépendamment de toute valeur de $2p$ et de S.

On remarquera que la condition du maximum de Gg (fig. 84) peut se ramener à la condition de maximum de la distance GO entre le centre de gravité du triangle et le point de concours des bissectrices. En effet, les triangles ABC, DEF, étant semblables, les points C et D, O et g, sont des points homologues, et par conséquent le rapport $\frac{Dg}{OC}=\frac{1}{2}$ comme le rapport $\frac{DG}{CG}$; et de plus les droites Dg et CO sont parallèles: donc Gg est la moitié de OG; ce qui démontre déjà ce théorème général :

Dans tout triangle la distance des centres de gravité de la surface et du contour est la moitié de la distance du centre de gravité au point de concours des bissectrices, et ces trois points sont en ligne droite.

Les coordonnées du point de concours des bissectrices étant $\beta=\alpha=\frac{yz}{x+y+z}$, on aura sur-le-champ à rendre maximum l'expression

$$\Delta'^2=\left(\frac{1}{3}z-\frac{S}{p\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{3}y-\frac{S}{p\sin\theta}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}z-\frac{S}{p\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{3}y-\frac{S}{p\sin\theta}\right)\cos\theta.$$

D'où l'on conclura comme précédemment $\sin\theta=1$, ou $\theta=100°$, et $z=y$.

Soit H et P les points de concours des hauteurs et des perpendiculaires élevées sur le milieu des côtés : les trois points H, G, P, sont, comme on sait, aussi en ligne droite, et de plus $PG=\frac{1}{2}GH$; par conséquent les triangles PGg, HOG, sont semblables, et Pg est parallèle à OH, et égal à sa moitié. De là ce théorème :

Dans tout triangle 1° la droite qui joint le point de concours des hauteurs et le centre du cercle inscrit est parallèle à la droite qui joint le centre de gravité du triangle et le centre du cercle circonscrit; 2° la distance de ces deux points est la moitié de la distance des deux autres.

576. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps pesant reposant sur un plan par plusieurs points soit en équilibre est que la verticale abaissée du centre de gravité du corps sur le plan tombe dans l'intérieur du polygone formé par la jonction des points d'appui. Le corps de l'homme dans la position verticale s'appuie sur les pieds, placés symétriquement et formant avec la distance des talons un trapèze isocèle. Il est d'autant plus solidement posé sur cette base, que, par la position de son centre de gravité et la grandeur de cette base, ce centre est moins exposé à en sortir par l'effet des chocs extérieurs. Le problème est donc réduit à déterminer la position des pieds lorsque le trapèze de sustentation a la plus grande surface ; et, généralement, à déterminer la position de deux droites AC, BD, d'égale longueur (fig. 85), mobiles autour de leurs extrémités A et B, situées à une distance donnée AB, pour que le trapèze isocèle ABCD soit le plus grand possible.

Abaissez la perpendiculaire BH, et soit $BD=AC=l$, $AB=a$, $DBE=200-DBA=\alpha$. La surface du trapèze aura évidemment pour expression $S=(AB+DH)BH$.

Or $DH=l\cos\alpha$, $BH=l\sin\alpha$; d'où $S=(a+l\cos\alpha)l\sin\alpha$. Egalant à zéro la dérivée du deuxième membre, on trouvera $l^2\sin^2\alpha-(a+l\cos\alpha)l\cos\alpha=0$; et, toute réduction faite, $2l\cos^2\alpha+a\cos\alpha=l$; d'où enfin

$$\cos\alpha=-\frac{a\pm\sqrt{a^2+8l^2}}{4l}.$$

La valeur de α ne pouvant excéder 100°, la seule valeur admissible sera

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2+8l^2}-a}{4l},$$

expression qui, mise sous la forme

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\frac{l^2}{2}}-\frac{a}{4}}{l},$$

peut se construire très facilement.

Si $a=0$, on trouve $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$; d'où $\alpha=50°$.

Si $a=l$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; d'où $\alpha=66°\frac{2}{3}$.

582. Soit les quantités données a, r et D, le côté, le rayon du cercle inscrit et la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit; R le rayon inconnu de ce dernier; en vertu (507) de la relation $D^2=R^2-2rR$ *, on pourra regarder

---

* *Étant donné deux cercles tels que, entre leurs rayons* R *et* r *et la distance* d *de leurs centres, il existe la relation* $d^2=R^2-2Rr$ (*m*), *si d'un point quelconque de la grande circonférence on mène deux cordes tangentes à la circonférence intérieure, la droite qui joint les extrémités de ces cordes est aussi tangente à la même circonférence, de sorte que le triangle ainsi formé est à la fois inscrit dans la grande circonférence et circonscrit à la petite.*

La corde qui joint les points (a, b), (X, Y), de la grande circonférence $X^2+Y^2=R^2$ (1), et qui est tangente à la petite circonférence $y^2+(x-d)^2=r^2$ (2), a pour équation $\frac{Y-b}{X-a}=-\left(\frac{x-d}{y}\right)$ (3); à cause de $a^2+b^2=R^2$ (*n*), on a en même temps $\frac{X+a}{Y+b}=\frac{x-d}{y}$ (4); enfin, les coordonnées (x, y) du point de contact devant satisfaire à la relation (3), on aura

$$\frac{y-b}{x-a}=-\frac{x-d}{y}. \qquad (5)$$

Combinant successivement les équations (2), (3) et (5), [(2)] (4) et (5), on obtiendra deux équations qui, additionnées membre à membre, donneront, toute réduction faite, en vertu des relations (*m*) et (*n*),

$$brY-[ar-(a-d)R]X+R[(a-d)d+(R-r)r]=0,$$

équation d'une ligne droite, qui n'est autre chose que la corde qui joint les extrémités des deux cordes tangentes menées par le point (a, b). Calculant la distance du centre de la petite circonférence, dont les coordonnées sont $y'=0$, $x'=d$, à cette droite, dont l'équation est de la forme $AY+BX+C=0$, d'après la formule connue $P=\frac{Ay'+Bx'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, on obtiendra $P=r$.

C. Q. F. D.

comme connu le rayon R, et le problème revient à déterminer le triangle, connaissant un côté et les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

Or, puisque l'on connaît le rayon du cercle circonscrit et un côté, on connaît aussi l'angle opposé à ce côté, et le problème est ramené à celui-ci : déterminer le triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et le rayon du cercle inscrit.

Soit A l'angle opposé au côté a; x, y, les côtés inconnus, on aura les relations

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos A, \qquad (1)$$

$$xy\sin A=(x+y+a)r. \qquad (2)$$

L'équation (1) prend la forme

$$a^2=(x+y)^2-4xy\cos^2\tfrac{1}{2}A;$$

et, à cause de l'équation (2),

$$a^2=(x+y)^2-\frac{4(x+y+a)r\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin A};$$

d'où l'on tire

$$(x+y)^2-2(x+y)r\cot\tfrac{1}{2}A=a^2+2ar\cot\tfrac{1}{2}A,$$

et, toute réduction faite,

$$x+y=a+2r\cot\tfrac{1}{2}A.$$

Par conséquent, enfin, le problème proposé revient à construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la somme des côtés qui comprennent cet angle; problème qui n'offre aucune difficulté.

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer toutes les constructions et de discuter les cas d'impossibilité.

584. Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2-1=0$ l'équation générale des courbes du 2e degré rapportée au centre et à deux axes rectangulaires; substituant dans cette équation les valeurs

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha', \qquad y=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha',$$

qui servent à passer d'un système rectangulaire à un système oblique, on obtient

$$\left.\begin{array}{l}A\sin^2\alpha\\+B\sin\alpha\cos\alpha\\+C\cos^2\alpha\end{array}\right|x'^2+\left.\begin{array}{l}2A\sin\alpha\sin\alpha'\\+B\sin\alpha\cos\alpha'\\+B\sin\alpha'\cos\alpha\\+2C\cos\alpha\cos\alpha'\end{array}\right|x'y'+\left.\begin{array}{l}A\sin^2\alpha'\\+B\sin\alpha'\cos\alpha'\\+C\cos^2\alpha'\end{array}\right|y'^2-1=0.$$

Egalant à zéro le coefficient du rectangle des variables, on aura

$$2A\sin\alpha\sin\alpha'+B\sin\alpha\cos\alpha'+B\sin\alpha'\cos\alpha+2C\cos\alpha\cos\alpha'=0. \quad (1)$$

Soit $y=px$, $y=qx$, les équations des nouveaux axes, de sorte que $p=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $q=\frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}$; l'équation précédente (1), mise sous la forme

$$2A\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}+\frac{B\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{B\sin\alpha'}{\cos\alpha'}+2C=0,$$

deviendra

$$2Apq+B(p+q)+2C=0; \quad (2)$$

et, en désignant par I l'angle des nouveaux axes, on aura

$$\operatorname{tang} I=\frac{p-q}{1+pq}.$$

La courbe rapportée aux nouveaux axes aura donc pour équation

$$(A\sin^2\alpha'+B\sin\alpha'\cos\alpha'+C\cos^2\alpha')y'^2+(A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha)x'^2-1=0.$$

Substituant dans cette équation les valeurs

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$\sin\alpha'=\frac{q}{\sqrt{1+q^2}},\quad \cos\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

on aura, toute réduction faite,

$$\frac{Aq^2+Bq+C}{1+q^2}y'^2+\frac{Ap^2+Bp+C}{1+p^2}x'^2-1=0. \quad (F)$$

Faisant successivement $y'=0$ et $x'=0$, on trouve

$$x_0'^2=\frac{1+p^2}{Ap^2+Bp+C},\quad y_0'^2=\frac{1+q^2}{Aq^2+Bq+C};$$

et désignant par a'^2, b'^2, les carrés des demi-diamètres conjugués, on aura

$$a'^2+b'^2=\frac{(1+p^2)(Aq^2+Bq+C)+(1+q^2)(Ap^2+Bp+C)}{(Ap^2+Bp+C)(Aq^2+Bq+C)}.$$

Développant le numérateur et ayant égard à l'équation (2), on le ramène à la forme $(A+C)(p-q)^2$.

Effectuant de même le produit du dénominateur, et ayant égard à la même relation (2), on le réduit à

$$-\frac{(B^2-4AC)(p-q)^2}{4},$$

et par conséquent

$$a'^2+b'^2=-\frac{(A+C)}{\frac{1}{4}(B^2-4AC)}.$$

Cette relation ne peut avoir lieu que dans le cas où $B^2-4AC<0$, c'est-à-dire dans le cas de l'ellipse. Dans le cas de $B^2-4AC>0$, il faut nécessairement que l'on ait $a'^2<0$ ou $b'^2<0$, condition qui se rapporte en effet à l'hyperbole.

En multipliant entre elles les valeurs de $x_0'^2$, $y_0'^2$, on obtient

$$a'^2b'^2=\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(Ap^2+Bp+C)(Aq^2+Bq+C)}.$$

Or, de $\tan\text{g}\, I=\frac{(p-q)}{1+pq}$ on tire

$$\sin I=\frac{p-q}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}\quad\text{et}\quad \sin^2 I=\frac{(p-q)^2}{(1+p^2)(1+q^2)},$$

et par conséquent

$$a'^2b'^2=\frac{1}{-\frac{1}{4}(B^2-4AC)\sin^2 I};$$

d'où $a'b'\sin I=$ constante.

Ces deux résultats, étant indépendants des valeurs de p et de q, démontrent que dans toute ellipse la somme des carrés des diamètres conjugués est constante, ainsi que le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques.

Et, comme il s'agit ici de la somme algébrique, on peut regarder comme démontré que la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques de l'hyperbole est constante comme la surface du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués.

587. Prenant pour axe des abscisses une droite parallèle à la droite donnée et pour axe des ordonnées une droite perpendiculaire, l'origine étant au centre de la courbe, l'équation de la courbe sera représentée par

$$Ay^2+Bxy+Cx^2-1=0, \qquad \text{(E)}$$

et la tangente au point x', y', par

$$(y-y')=-\frac{2Cx'+By'}{2Ay'+Bx'}(x-x'). \qquad \text{(T)}$$

Pour trouver la direction du grand axe de l'ellipse on substituera les valeurs

$$y=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha, \qquad x=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha,$$

qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes de même espèce, ce qui donnera, toute réduction faite,

$$(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha-B\sin^2\alpha)y''^2+(A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha)x''^2-1=0,$$

et pour déterminer la direction du grand axe,

$$B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(A-C)\sin\alpha\cos\alpha=0;$$

d'ailleurs l'équation du grand axe sera

$$y=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x.$$

Pour exprimer que la tangente est parallèle à la droite don-

née, ou ce qui est la même chose à l'axe des x, il suffit d'égaler à zéro le coefficient de x dans l'équation (T), ce qui donne les relations $2Cx'+By'=0$, $y=y'$; enfin les longueurs des demi-axes a et $b$seront déterminées par les équations

$$A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{b^2},$$

$$A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{a^2},$$

de sorte que pour éliminer les quantités A, B, C, α, x', y', variables à cause du mouvement de rotation de l'ellipse autour de son centre, on aura les relations

$$y'=y, \qquad (1)$$

$$2Cx'+By'=0, \qquad (2)$$

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-1=0, \qquad (3)$$

$$B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(A-C)\sin\alpha\cos\alpha=0, \qquad (4)$$

$$y=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x, \qquad (5)$$

$$A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{b^2}, \qquad (6)$$

$$A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{a^2}; \qquad (7)$$

l'équation finale en x et y représentera le lieu géométrique demandé.

Substituant dans l'équation (3) les valeurs de x' et y' tirées des équations (1) et (2), on obtient

$$(B^2-4AC)y^2+4C=0. \qquad (8)$$

Les équations (4), (6) et (7) se mettent sous la forme

$$B\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)+2(A-C)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0,$$

$$A+C\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-B\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$A\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+C+B\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

et, à cause de l'équation (5), qui donne

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{x} \text{ et } \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{y^2+x^2}{x^2},$$

ces équations deviennent, toute réduction faite,

$$B(x^2-y^2)+2(A-C)xy=0, \tag{9}$$

$$Ax^2+Cy^2-Bxy=\frac{x^2+y^2}{b^2}, \tag{10}$$

$$Ay^2+Cx^2+Bxy=\frac{x^2+y^2}{a^2}. \tag{11}$$

Il ne reste plus qu'à éliminer A, B et C, entre les quatre équations (8), (9), (10) et (11).

En ajoutant les équations (10) et (11), on trouve

$$A+C=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}, \tag{12}$$

et en les retranchant

$$(A-C)(x^2-y^2)-2Bxy=(x^2+y^2)\frac{(a^2-b^2)}{a^2b^2}. \tag{13}$$

Substituant dans cette équation la valeur de (A—C) tirée de l'équation (9), on obtient

$$B=-\frac{2xy(a^2-b^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}, \tag{14}$$

et par suite

$$A-C=\frac{(a^2-b^2)(x^2-y^2)}{a^2b^2(x^2+y^2)}. \tag{15}$$

Les équations (12) et (15) donnent

$$A=\frac{a^2x^2+b^2y^2}{a^2b^2(x^2+y^2)}, \qquad C=\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2(x^2+y^2)}.$$

Substituant enfin ces valeurs de A, B et C, dans l'équation (8), et réduisant, on trouvera pour équation du lieu géo-

métrique cherché

$$y^2(x^2+y^2)-(a^2y^2+b^2x^2)=0. \qquad \text{(F)}$$

Passant aux coordonnées polaires au moyen de la substitution des valeurs $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, on trouvera

$$\rho=\sqrt{c^2+\frac{b^2}{\sin^2\omega}},$$

expression dans laquelle $c^2=a^2-b^2$.

Pour construire cette courbe, on mènera parallélement à la droite donnée et à une distance du centre égale au demi petit axe de l'ellipse, une droite BD; et, par le centre O de la courbe, des sécantes quelconques, qui rencontreront cette droite en des points tels que I; sur les droites OI on élèvera, aux points I, des perpendiculaires $IF=c$, et rabattant par un arc de cercle les longueurs OF sur la droite OI, en OM, on obtiendra autant de points M de la courbe.

On voit facilement que cette courbe se compose de deux branches symétriques et asymptotes aux deux droites BD, menées parallélement à la droite donnée à une distance du centre égale au demi petit axe. La plus grande ordonnée est évidemment égale au demi-grand axe. Ce résultat est d'ailleurs indiqué aussi par la discussion directe de l'équation (F) en ordonnées rectangulaires. Enfin le centre de l'ellipse est un point isolé de la courbe.

589. La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, d'aprés les conditions données, est que le centre de gravité G (fig. 86) du trapéze soit situé sur la droite CG perpendiculaire aux deux bases; en d'autres termes, que la distance du centre de gravité au côté perpendiculaire AD soit égale à la longueur dn côté inconnu CD.

Supposons qu'on ait prolongé les côtés non paralléles du trapéze jusqu'à leur point de rencontre I, et désignons par b la base donnée AB, x la base inconnue CD, H la hauteur

totale IA, et h la hauteur AD. D'après le théorème des moments, on aura

$$\frac{Hb}{2}\cdot\frac{1}{3}b-\frac{(H-h)x}{2}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{(b+x)h}{2}\cdot x;$$

d'où $(b^2-x^2)H+hx^2=3hx(b+x)$. On a d'ailleurs

$$\frac{H}{H-h}=\frac{b}{x},$$

et par conséquent

$$H=\frac{bh}{b-x}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera, sans difficulté, $2x^2+2bx-b^2=0$; d'où

$$x=-\frac{b}{2}\pm\frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

De là cette construction :

Inscrire un triangle équilatéral dans le cercle décrit sur la base donnée $AB=b$, comme diamètre, et retrancher du côté du triangle le rayon du cercle, le reste sera la longueur de la base supérieure demandée.

590. Soit $2p$, S, A, le périmètre, la surface et l'angle donnés; x, y, z, les côtés inconnus du triangle, x étant le côté opposé à A : on aura les relations

$$x+y+z=2p, \qquad (1)$$

$$\frac{yz\sin A}{2}=S, \qquad (2)$$

$$x^2=y^2+z^2-2yz\cos A. \qquad (3)$$

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$x^2=(y+z)^2-2yz(1+\cos A),$$

et, à cause de $1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$,

$$x^2=(y+z)^2-4yz\cos^2\frac{1}{2}A.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de $y+z$ et de yz tirées des équations (1) et (2), on obtient

$$x^2=(2p-x)^2-\frac{8S\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin A},$$

et, toute réduction faite,

$$x=\frac{p^2-S\cot\frac{1}{2}A}{p}.$$

Si l'on fait $S=ph\tang A$, on trouvera $x=p-h$.

Les deux autres côtés seront donnés par les équations $y+z=p+h$, $yz=\frac{ph}{\cos^2\frac{1}{2}A}$; et par conséquent leurs valeurs seront les racines de l'équation

$$y^2-(p+h)y+\frac{ph}{\cos^2\frac{1}{2}A}=0.$$

La valeur de x se construit très facilement d'après les transformations précédentes. Ce côté $x=MN$ étant trouvé, on décrira sur ce côté, comme corde, deux segments capables l'un de l'angle A, l'autre de l'angle $\frac{1}{2}A$; d'une des extrémités de ce même côté, M par exemple, comme centre, et avec un rayon égal à $2p-x$, on décrira un arc de cercle, qui coupera l'arc du second segment généralement en deux points O, O'; les triangles MNO, MNO', satisfont à la question.

On peut aussi calculer numériquement le côté x en mettant sa valeur sous la forme

$$x=p\left(1-\frac{S}{p^2}\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}\right),$$

et, si l'on fait $\frac{S}{p^2}=\tang\varphi$, on aura

$$x=\frac{p\sin(\frac{1}{2}A-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

l'angle auxiliaire φ étant déterminé par la relation qui précède.

591. Cette équation, étant du 3e degré, aura toujours au moins une valeur réelle pour y, quels que soient le signe et la grandeur attribués à x. Du reste la condition de réalité des trois racines étant

$$(-ax)^3+\left(\frac{x^3}{2}\right)^2<0,$$

on voit que entre $x=0$ et $x=a\sqrt[3]{4}$ les trois racines seront réelles.

On voit de plus que l'équation proposée ne présente jamais que deux variations et une permanence : ainsi, dans le cas des trois racines réelles, il y en a deux positives et une négative.

S'il y a des valeurs de y imaginaires, auquel cas x doit être négatif, cette valeur sera positive et croîtra indéfiniment comme la valeur négative correspondante à x positif.

La courbe se compose donc de plusieurs branches (fig. 87), dont trois, Aqm, Amn, Ap, s'élèvent au dessus de l'axe des abscisses, la dernière indéfiniment ; et la quatrième, Ao s'étend indéfiniment au dessous du même axe.

En cherchant, d'après la méthode générale, l'inclinaison t de la tangente sur l'axe des abscisses, on trouvera

$$t=\frac{ay-x^2}{y^2-ax};$$

d'où l'on voit que la tangente est parallèle à l'axe des abscisses au point $x=a\sqrt[3]{2}$, $y=a\sqrt[3]{4}$; et perpendiculaire à ce même axe au point $x=a\sqrt[3]{4}$, $y=a\sqrt[3]{2}$.

On déterminera les points multiples de la courbe en cherchant la condition pour que l'équation proposée ait des racines égales ; cette condition est exprimée par

$$x(4a^3-x^3)=0;$$

ce qui donne $x=0$, d'où $y=0$, et $x=a\sqrt[3]{4}$, $y=a\sqrt[3]{2}$, c'est-à-dire l'origine A, où deux branches de la courbe viennent se croiser ; et le point m, où deux branches de la courbe se réunissent.

Pour obtenir les asymptotes rectilignes, on s'assurera si l'expression de la distance de l'origine aux points où la tangente coupe les axes coordonnées est susceptible de limite; or on a pour l'équatien générale de la tangente

$$Y-y=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}(X-x),$$

et, faisant successivement $Y=0$, $X=0$, on obtiendra

$$X_0=-\frac{axy}{ay-x^2}, \qquad Y_0=\frac{axy}{y^2-ax}.$$

Afin de déterminer la limite de ces expressions, on fera $y=Kx$ dans l'équation proposée, ce qui donnera

$$y=\frac{3ak}{1+k^3}.$$

y devient infini pour $K=-1$, et par conséquent $y=-x$; changeant donc x en $-y$ dans les expressions précédentes et prenant les limites, on obtient

$$X_1=AU=-a, \qquad Y_1=AV=-a.$$

La courbe a pour asymptote rectiligne la droite UV, dont l'équation est $y+x+a=0$.

On aurait pu arriver au même résultat par la méthode générale, en résolvant directement l'équation proposée; ce qui donne

$$y=\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-a^3x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-a^3x^3}}.$$

Effectuant les opérations indiquées, on trouve pour l'équation de l'ordonnée

$$y=-x-a+\frac{a^3}{3x^2}+\frac{a^4}{3x^3}\ldots\ldots$$

La courbe (fig. 87) est connue sous le nom de *folium* de Descartes.

Si l'on fait l'application à l'équation proposée de la méthode générale pour trouver les diamètres de la courbe

(nº 27), on trouvera

$$y' = x'$$

pour l'équation du diamètre rectiligne de la courbe : résultat qu'il était d'ailleurs facile de prévoir, car l'équation proposée ne change pas si l'on y change y en x, et réciproquement.

592. D'après l'énoncé, si l'on désigne par N le quantième de l'année demandée, il s'agit de trouver pour N une valeur telle que les quantités

$$\frac{(N+9)-27}{28}, \quad \frac{(N+1)-15}{19}, \quad \frac{(N-3)-11}{15},$$

soient entières et positives ; ou bien, désignant ces quotients entiers par x, y, z, on aura à résoudre les équations indéterminées

$$N = 28x + 18, \qquad (1)$$

$$N = 19y + 14, \qquad (2)$$

$$N = 15z + 8, \qquad (8)$$

Les équations (2) et (3) donnent $19y + 14 = 15z + 8$; d'où l'on tire $y = 15t + 6$, $z = 19t + 8$; et par conséquent le nombre cherché, eu égard seulement aux deux dernières conditions, sera de la forme

$$N = 285t + 128. \qquad (4)$$

Egalant les seconds membres des équations (1) et (4), on aura $28x + 18 = 285t + 128$; d'où l'on tire $t = 28v + 6$, $x = 285v + 65$; et enfin pour le nombre cherché,

$$N = 7980v + 1838.$$

Le nombre demandé est donc 1838.

594. Prenons pour axe des x la droite OABM (fig. 88) qui joint les centres des cercles et le point décrivant, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite élevée par le centre du cercle immobile ; soit le cercle mobile arrivé en c et le point décrivant en m.

D'après l'énoncé de la question, l'arc AA'=arc aA'. Soit fait $OA=R$, $AC=r$, $CM=d$; $OP=x$, $mP=y$, $AA'=z$.

Si l'arc $AA'=z$, l'angle $AOA'=\frac{z}{R}$ et $acA'=\frac{z}{r}$. On a $x=OP=OH+cn$, $y=mP=cH+mn$. Or

$$OH=Oc\cos AOA'=(R+r)\cos\frac{z}{R},$$

$$cn=cm\cos mcn=d\cos(mcD+Dcn)=d\cos(acA'+AOA')=d\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right),$$

$$cH=Oc\sin AOA'=(R+r)\sin\frac{z}{R},$$

$$mn=cm\sin mcn=d\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right).$$

On aura donc les deux équations

$$\left.\begin{aligned} x&=(R+r)\cos\frac{z}{R}+d\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)\\ y&=(R+r)\sin\frac{z}{R}+d\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

L'élimination de z entre ces deux équations déterminera le lieu géométrique demandé ; épicycloïde allongée ou raccourcie, selon que $d>r$ ou $<r$.

Si l'on ajoute membre à membre ces deux équations, après avoir élevé au carré, on obtient

$$x^2+y^2=(R+r)^2+d^2+2d(R+r)\left[\sin\frac{z}{R}\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)+\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)\cos\frac{z}{R}\right].$$

Développant $\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)$, on trouve

$$x^2+y^2=(R+r)^2+d^2+2d(R+r)\cos\frac{z}{r}.\qquad(2)$$

On aurait pu obtenir ce résultat plus promptement en observant que le triangle Ocm donne

$$\overline{Om}^2=\overline{Oc}^2+\overline{cm}^2-2Oc.\ cm\cos(200^\circ-acA').$$

Si l'on suppose $d=r$, on a les équations

$$\left.\begin{aligned} x&=(R+r)\cos\frac{z}{R}+r\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right) \\ y&=(R+r)\sin\frac{z}{R}+r\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

qui donneraient pour l'élimination de z l'équation de l'épicycloïde ordinaire.

Cas particulier. — 1° Comme cas particulier, et pour donner une idée du calcul d'élimination, nous supposerons en même temps $d=r=R$. On aura les équations

$$x=2R\cos\frac{z}{R}+R\cos 2\frac{z}{R},\quad x^2+y^2=R^2\left[5+4\cos\frac{z}{R}\right].$$

De la première on tire

$$x=2R\cos^2\frac{z}{R}+2R\cos\frac{z}{R}-R;$$

d'où enfin

$$\cos\frac{z}{R}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+3R}{R}}.$$

Substituant cette valeur dans la deuxième, on trouve

$$(x^2+y^2)-6R^2(x^2+y^2)^2-8R^3x-3R^4=0,$$

équation de l'épicycloïde produite par le roulement d'un cercle sur la circonférence du cercle fixe de même rayon.

L'équation en coordonnées polaires est

$$\rho^4-6R^2\rho^2-8R^3\rho\cos\omega-3R^4=0.$$

2° Si le point M tombe sur le centre du cercle immobile, c'est-à-dire si $d=-(R+r)$, les équations (1) deviennent

$$x=(R+r)\left[\cos\left(\frac{z}{R}\right)-\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)\right],$$

$$y=(R+r)\left[\sin\left(\frac{z}{R}\right)-\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)\right],$$

et l'équation (2) donne

$$(x^2+y^2)=2(R+r)^2\left(1-\cos\frac{z}{r}\right)=4(R+r)^2\cos^2\left(\frac{z}{2r}\right);$$

d'où $$\cos\left(\frac{z}{2r}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2(R+r)}.$$

Des premières équations on tire

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\frac{z}{R}-\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)}{\sin\frac{z}{R}-\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{r}\right)}=-\tang\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{2r}\right),$$

d'où

$$\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{2r}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{2r}\right)=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

et, à cause de $\sqrt{x^2+y^2}=2(R+r)\cos\frac{z}{2r}$, on aura

$$x=2(R+r)\cos\frac{z}{2r}\sin\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{2r}\right),$$

$$y=-2(R+r)\cos\frac{z}{2r}\cos\left(\frac{z}{R}+\frac{z}{2r}\right).$$

Si l'on suppose $R=2r$, ces valeurs deviennent

$$x=6r\cos\frac{z}{2r}\sin\frac{z}{2r},\quad y=-6r\cos\frac{z}{2r}\cos\frac{z}{r};$$

et $$\sqrt{x^2+y^2}=6r\cos\frac{z}{2r}.$$

Soit fait $\cos\frac{z}{2r}=u$, on aura

$$\sin\frac{z}{2r}=\sqrt{1-u^2}\ \text{ et } \sin\frac{z}{r}=2\sin\frac{z}{2r}\cos\frac{z}{2r}=2u\sqrt{1-u^2},$$

et $$\cos\frac{z}{r}=\cos^2\frac{z}{2r}-\sin^2\frac{z}{2r}=2u^2-1;$$

d'où, à cause de $\sqrt{x^2+y^2}=6ru$, et $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{6r}$,

$$(18r^2y)^2=[18r^2-(x^2+y^2)]^2(x^2+y^2);$$

ou, passant aux coordonnées polaires,

$$\rho^2-18r^2=\pm18r^2\sin\omega,\ \text{d'où}\ \rho=3r\sqrt{2}\sqrt{1\pm\sin\omega}.$$

596. Soit

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'=0 \qquad (E)$$

l'équation de la courbe rapportée à deux axes rectangulaires menés par le sommet, l'axe des x étant parallèle à la droite donnée. L'équation de la tangente au point x', y', sera

$$y-y'=-\left(\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D}\right)(x-x'),$$

et, d'après la condition de l'énoncé, on aura les relations $y'=y$, $By'+2cx'+E=0$. Prenant les valeurs de x' et de y' de ces deux équations pour les substituer dans l'équation (E), on trouvera

$$(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+E^2=0. \qquad (C)$$

Substituant dans l'équation (E) les valeurs

$$x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha, \qquad y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha,$$

pour passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, on trouvera une équation de la forme

$$A'y''^2+B'x''y''+C'x''^2+D'y''+E'=0,$$

dans laquelle

$$A'=A\cos^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$
$$B'=B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(A-C)\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C'=A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha,$$
$$D'=D\cos\alpha-E\sin\alpha, \quad E'=D\sin\alpha+E\cos\alpha.$$

Si l'on veut que le nouvel axe des abscisses se confonde avec le grand axe ou l'axe transverse de la courbe,

Pour l'ellipse, dont l'équation est $a^2y^2+b^2x^2-2ab^2x=0$, on a $A'=a^2$, $B'=0$, $C'=b^2$, $D'=0$, $E'=-2ab^2$;

Pour l'hyperbole, dont l'équation est $a^2y^2-b^{22}+2ab^2x=0$, on a $A'=a^2$, $B'=0$, $C'=-b^2$, $D'=0$, $E'=+2ab^2$;

Enfin pour la parabole, dont l'équation est $y^2-2px=0$, on a $A'=1$, $B'=0$, $C'=0$, $D'=0$, $E'=-2p$.

1° Pour l'ellipse on aura donc

$$A\cos^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha=a^2, \qquad (1)$$

$$B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(A-C)\sin\alpha\cos\alpha=0, \quad (2)$$

$$A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=b^2, \quad (3)$$

$$D\cos\alpha-E\sin\alpha=0, \quad (4)$$

$$D\sin\alpha+E\cos\alpha=-2ab^2, \quad (5)$$

et enfin
$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (6)$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$E-2ab^2\cos\alpha, \quad D=-2ab^2\sin\alpha.$$

Les équations (1) et (3) donnent par addition

$$A+C=a^2+b^2,$$

et par soustraction

$$(A-C)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-2B\sin\alpha\cos\alpha=a^2-b^2.$$

Combinant cette équation avec l'équation (2), on obtiendra

$$A-C=(a^2-b^2)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \quad B=-2(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Des valeurs de A+C et de A−C on conclut enfin

$$C=a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha, \quad A=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha.$$

De l'équation (6) on tire $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et par conséquent les valeurs de A, B, C, D, E, deviennent

$$A=\frac{a^2x^2+b^2y^2}{x^2+y^2}, \quad B=-\frac{2(a^2-b^3)xy}{x^2+y^2}, \quad C=\frac{a^2y^2+b^2x^2}{x^2+y^2},$$

$$D=-\frac{2ab^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad E=-\frac{2ab^2x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (C), on trouvera

$$y^2(x^2+y^2)-2ay^2\sqrt{x^2+y^2}-b^2x^2=0, \quad (L)$$

équation du lieu géométrique demandé.

Passant aux coordonnées polaires, à l'aide des formules $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, on trouvera

$$\rho=\pm a\pm\sqrt{c^2+\frac{b^2}{\sin^2\omega}},$$

courbe à quatre branches. Le sommet est un point isolé.

2° Pour l'hyperbole, il suffit de changer b^2 en $-b^2$, et

l'on obtient

$$\rho = \pm a \pm \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{\sin^2\omega}}.$$

Deux courbes fermées.

3° Pour la parabole, on a

$$A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = 1,$$
$$B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha = 0,$$
$$D\cos\alpha - E\sin\alpha = 0, \quad D\sin\alpha + E\cos\alpha = -2p, \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

d'où l'on tirera les valeurs de A, B, C, D, E, pour les substituer dans l'équation

$$2(BE - 2CD)y + E^2 = 0, \qquad (C')$$

et l'on obtiendra, toute réduction faite, en coordonnées rectilignes,

$$y^2\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}px^2 = 0,$$

en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{1}{2}p\cot^2\omega,$$

pour le lieu géométrique demandé.

597. *Première solution.* Soit $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ l'équation de l'ellipse donnée, rapportée à son centre et à ses axes; désignons par x', y'; x'', y''; α, β, les coordonnées inconnues des sommets M, N, P, du triangle demandé : on aura évidemment entre ces inconnues les relations

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2, \qquad (2)$$
$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2, \qquad (1)$$
$$A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 = A^2B^2, \qquad (3)$$
$$(y' - \beta) + (x' - \alpha)^2 = (y'' - \beta)^2 + (x'' - \alpha)^2, \qquad (4)$$
$$(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 = (y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2, \qquad (5)$$

et, en vertu de la condition de l'énoncé,

$$y'' = -y', \qquad x'' = -x'. \qquad (6)\ (7)$$

Eliminant x', y', x'', y'', entre ces équations, on obtiendra

$$A^2\alpha^2+B^2\beta^2=3A^2B^2. \qquad (8)$$

Les coordonnées du sommet P seront données par l'élimination entre les équations (3) et (8), c'est-à-dire par l'intersection de deux ellipses concentriques dont les axes sont donnés ou faciles à déterminer, $2A\sqrt{3}$, $2B\sqrt{3}$.

Deuxième solution. On peut encore simplifier la solution en ramenant l'intersection des deux ellipses à l'intersection d'une ellipse et d'un cercle concentrique d'un rayon facile à construire.

Additionnant membre à membre les équations (3) et (8), on trouve, toute réduction faite,

$$(\alpha^2+\beta^2)=\frac{4A^2B^2}{A^2+B^2}. \qquad (9)$$

Et par conséquent les coordonnées α, β, sont données par l'intersection de l'ellipse donnée (3) et du cercle concentrique (9).

Le rayon du cercle $\rho=\frac{2AB}{\sqrt{A^2+B^2}}$ peut s'exprimer par

$$\frac{2B}{\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}}.$$

Or il est facile de voir que, si l'on joint AB (fig. 89), l'angle ABO a pour tangente $\frac{A}{B}$, et par conséquent pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}.$$

Donc $\qquad \frac{\rho}{2}=A\cos ABO,$

et si l'on abaisse la perpendiculaire OI sur AB, on a

$$OI=OA\cos AOI=OA\cos ABO\,; \quad \text{donc } \tfrac{1}{2}\rho=OI.$$

Il est facile de déterminer la longueur du côté du triangle équilatéral en fonction des axes de l'ellipse. Pour cela en désignant par c le côté, on aura $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=c^2$, et à cause de $x'=\pm\frac{\beta}{3}$, $y'=\mp\frac{\alpha}{3}$, on trouve

$$\frac{1}{2}c=\frac{\left(\frac{2AB}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{\rho}{\sqrt{3}}.$$

De là résulte la construction géométrique suivante (fig. 89) :

Mener AB, et OI perpendiculaire sur AB; prendre IG=OI, et achever le triangle équilatéral, dont on déterminera le centre C. Du point O, comme centre, décrire un cercle, avec un rayon égal à OG, qui déterminera le point P; et ensuite un second cercle, avec un rayon égal à OC, qui déterminera les points M et N.

Cette construction fait voir que le problème ne sera pas possible lorsque OI sera plus grand que OA.

On peut au surplus déterminer analytiquement la condition d'impossibilité en éliminant entre les équations (3) et (9) : on trouve en effet

$$\alpha=\pm AB\sqrt{\frac{3A^2-B^2}{A^4-B^4}},$$

et par conséquent il faut d'abord que $A\sqrt{3}=$ ou $>B$; et, comme α doit être plus petit que A, il faut aussi que

$$\frac{3A^2B^2-B^4}{A^4-B^4}<1\text{ ; d'où } 4>B\sqrt{3},$$

relation qui aurait donné aussi la valeur

$$\beta=\frac{AB\sqrt{A^2-3B^2}}{\sqrt{A^4-B^4}}.$$

Enfin on peut résoudre ce problème d'une manière purement géométrique, ainsi qu'il suit (fig. 90) :

Déterminer un système de diamètres conjugués OD, OE, faisant entre eux l'angle $\frac{\pi}{3}$. Diviser l'angle DOE en deux parties égales par le diamètre OP, et mener le diamètre

MON perpendiculaire à OP : le triangle MNP satisfera à la question.

599. Soit A, B, C, les trois points donnés : le problème revient évidemment à mener par deux de ces points, A et B, à un même point M d'une courbe donnée du 2e degré, deux sécantes ADM, BEM, telles que la corde de section DE passe par le troisième point C.

Soit
$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (1)$$
l'équation générale des courbes du 2e degré ; a', b', a'', b'', a''', b''' et x', y', les coordonnées des points A, B, C et M : on aura pour ces dernières coordonnées la relation
$$y'^2 = 2px' + qx'^2. \qquad (2)$$
Les équations des sécantes ADM, BEM,
$$y - y' = \frac{y' - b'}{x' - a'}(x - x'), \qquad y - y' = \frac{y' - b''}{x' - a''}(x - x'),$$
pourront être considérées dans leur ensemble comme le lieu géométrique, exprimé par leur produit
$$(y-y')^2(x'-a')(x'-a'') - (x-x')(y-y')[(x'-a')(y'-b'') + (x'-a'')(y'-b')]$$
$$+ (x-x')^2(y'-b')(y'-b'') = 0. \qquad (3)$$

Substituant dans cette équation la valeur du rapport $\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{2p+q(x+x')}{y+y'}$ tirée de la combinaison des équations (1) et (2), on obtient
$$[2p+q(x+x')]^2(x'-a')(x'-a'') - [y+y'(2p+q(x+x'))][(x'-a')(y'-b'') + (x'-a'')(y'-b')]$$
$$+ (y+y')^2(y'-b')(y'-b'') = 0. \qquad (4)$$

D'après cette substitution, l'équation (4) représente un lieu géométrique passant par les points D et E, ainsi que l'équation (3) ; par conséquent toute combinaison de ces deux équations représentera aussi un lieu géométrique passant par ces mêmes points ; ajoutant donc les équations (3) et (4), et réduisant en ayant égard aux équations (1) et (2), on

trouvera, avec un peu d'attention, le résultat symétrique

$$(yy'-p(x+x')-qxx')(b'b''-p(a'+a'')-qa'a'')=(b'y'-p(a'+x')-qa'x')(b''y-p(a''+x)-qa''x)$$
$$+(b''y'-p(a''+x')-qa''x')(b'y-p(a'+x)-qa'x). \qquad (5)$$

Cette équation du 1er degré en x et y représente la corde de section DE.

Si l'on veut exprimer que cette droite passe par le point C, il suffira de remplacer dans l'équation (5) x et y par a''' et b''', et l'on obtiendra

$$(b'''y'-p(a'''+x')-qa'''x')(b'b''-p(a'+a'')-qa'a'')=(b'y'-p(a'+x')-qa'x')(b''b'''-p(a''+a''')-qa''a''')$$
$$+(b''y'-p(a''+x')-qa''y')(b'b'''-p(a'+a''')-qa'a'''), \qquad (6)$$

équation du 1er degré en x', y', et qui représente par conséquent une droite qui, par son intersection avec la courbe donnée, déterminera le point cherché M.

On construira facilement cette droite si l'on se souvient que la polaire d'un point quelconque dont les coordonnées sont α, β, ou autrement dit la corde de contact des deux tangentes qu'on peut mener par ce point, étant généralement

$$\beta Y-p(\alpha+X)-q\alpha X=0,$$

la distance d'un autre point quelconque α', β', à cette droite, sera exprimée, d'après la formule connue, par

$$\pm\frac{\beta\beta'-p'(\alpha+\alpha')-q\alpha\alpha'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

En effet, soit P′, P″ (fig. 91), P‴, les polaires des points A(a', b'), B(a'', b''), C(a''', b'''); et h', h'', h''', les distances du point inconnu M à ces droites; b et c les distances des points B et C à la polaire P′ du point A, a et d celles des points A et C à la polaire P″ de B : l'équation (6) pourra se mettre sous la forme

$$h'''=\frac{c}{b}\,h''+\frac{d}{a}\,h'. \qquad (7)$$

De plus, soit p', p'', p''', les trois côtés du triangle formé par les polaires P′, P″, P‴; et h la distance du sommet au côté

p''' : la surface de ce triangle sera exprimée par $\frac{p'''h}{2}$; et si l'on joint le point M avec les trois sommets, on formera trois triangles tels que le triangle formé par l'intersection des polaires sera égal à l'excès de la somme de deux de ces triangles sur le troisième. On aura donc entre les quantités h', h'', h''' cette seconde relation

$$h''' = \frac{p''}{p'''} h'' - \frac{p'}{p'''} h' + h. \tag{8}$$

La comparaison des équations (7) et (8) donne

$$h''\left(\frac{c}{b} - \frac{p''}{p'''}\right) + h'\left(\frac{d}{a} + \frac{p'}{p'''}\right) - h = 0, \tag{9}$$

équation qui représente en h' et h'' une droite que l'on construira aisément dans l'angle des deux droites P' et P''.

L'intersection de cette droite et de la courbe proposée résoudra le problème, dans le cas le plus général.

Si le point C se trouvait sur la droite AB, on sait que dans ce cas les trois polaires se coupent en un seul et même point : on a par conséquent $h=0$, $p'=0$, $p''=0$, $p'''=0$. Mais les rapports $\frac{p'}{p'''}$, $\frac{p''}{p'''}$, sont finis et égaux à $\frac{n'}{n'''}$, $\frac{n''}{n'''}$, en représentant par n', n'', n''', les trois cotés d'un triangle dont les directions seraient parallèles à P', P'', P''' : alors l'équation (9) se réduit à

$$h''\left(\frac{c}{b} - \frac{n''}{n'''}\right) + h'\left(\frac{d}{a} + \frac{n'}{n'''}\right) = 0, \tag{10}$$

et représente une droite qui passe par le point de concours des trois polaires.

Enfin si le point C était situé à l'infini sur la droite AB, c'est-à-dire si la droite DE devait être parallèle à cette droite, cette condition, exprimée par la relation

$$\frac{b'y' - p(a'+x') - qa'x'}{b'^2 - 2pa' - qa'^2} = \frac{b''y' - p(a''+x') - qa''x'}{b''^2 - 2pa'' - qa''^2}, \tag{11}$$

ainsi qu'on peut le voir par les équations (5) ou (6), fournit

la construction très simple qui suit : Par les points A et B (fig. 92) menez AO, BO, parallèles à leurs polaires, et joignez le point d'intersection O de ces droites avec le point de rencontre I des polaires par une droite OI, qui déterminera par sa rencontre avec la courbe les deux points M et M', qui satisfont à la question.

En effet si l'on exprime par h', h'', les distances du point inconnu M aux polaires P', P'', des points A et B; et par a et b les distances de ces points aux mêmes polaires, l'équation (11) prendra la forme $\frac{h'}{a}=\frac{h''}{b}$; ce qui s'accorde parfaitement avec la construction précédente, car le rapport des distances des points M et A, M et B, à la même polaire, est égal au même rapport $\frac{\text{IM}}{\text{MO}}$.

600. Si l'on suppose le poids de chaque sphère décomposé suivant deux directions, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle au plan sur lequel elle s'appuie, on verra d'abord que, dans le cas de l'équilibre, il faut pour première condition que l'intersection des plans inclinés soit horizontale; secondement, il faut encore que les forces avec lesquelles les sphères se repoussent mutuellement dans la direction de la ligne des centres soient égales. Cette dernière condition servira à déterminer la position des sphères entre les plans inclinés.

En effet, supposant le problème résolu et les sphères en équilibre, si l'on conçoit que par la ligne qui joint les centres on ait mené un plan perpendiculaire à l'intersection des plans inclinés, ce plan vertical coupera le plan horizontal, les plans inclinés et les deux sphères, suivant des droites HH', AB, AB' (fig. 93), et des circonférences C et C', lesquelles seront tangentes entre elles et aux droites qui correspondent aux plans inclinés.

Le centre de la première sphère C sera sollicité par trois forces : $p\cos\theta$, dirigée suivant CE, pression de la sphère sur

le plan incliné AB; $p\sin\theta$, dirigée suivant CG, parallèle à AB, force avec laquelle elle tend à rouler le long du plan; φ, dirigée suivant CC′, force inconnue résultant de la pression des deux sphères l'une contre l'autre. Or, ces trois forces étant en équilibre, on aura la relation connue

$$\frac{p\sin\theta}{\varphi}=\frac{\sin C'CE}{\sin GCE};$$

d'où $$\varphi=\frac{p\sin\theta}{\sin C'CE} \qquad (1)$$

à cause de $\sin GCE=\sin 100^\circ=1$.

De même le centre C′ de la seconde sphère est sollicité par trois forces : la première, $p'\cos\theta'$, dirigée suivant C′E′, et exprimant la pression de la sphère sur le plan incliné; la seconde, $p'\sin\theta'$, dirigée suivant C′G parallèle à AB′, exprimant la force avec laquelle la sphère tend à rouler le long de ce plan; la troisième enfin, φ, dirigée suivant C′C, et exprimant la pression des deux sphères l'une contre l'autre. L'équilibre de ces trois forces donne pareillement

$$\varphi=\frac{p'\sin\theta'}{\sin CC'E'}. \qquad (2)$$

De la comparaison des équations (1) et (2) on tire sur-le-champ

$$\frac{\sin CC'E'}{\sin C'CE}=\frac{p\sin\theta}{p'\sin\theta'}.$$

Or $\sin CC'E'=\sin(CC'G+GC'E')=\sin(100^\circ+CC'G)=\cos CC'G$,

$\sin C'CE=\sin(C'CG+GCE)=\sin(100^\circ+C'CG)=\cos C'CG$;

donc $$\frac{\cos CC'G}{\cos C'CG}=\frac{p\sin\theta}{p'\sin\theta'}. \qquad (3)$$

Maintenant si l'on remarque que l'angle $CGC'=BAB'$ n'est autre chose que l'inclinaison donnée des deux plans inclinés, et que d'ailleurs la somme des angles CC′G, C′CG, est donnée, puisqu'elle est égale à $200^\circ-BAB'$, on verra

que le problème se réduit à diviser un angle donné en deux parties telles que le rapport de leurs cosinus soit égal à un rapport donné.

On peut conclure de cette analyse la construction suivante :

Mener parallèlement aux plans inclinés et dans un plan perpendiculaire à leur commune intersection les droites CG, C'G, à des distances égales aux rayons des sphères données, ce qui déterminera l'angle CGC' égal à l'angle des plans; porter sur CG, à partir du point G, une distance GX égale à la force qui tend à faire rouler la sphère C sur le plan incliné correspondant et élever une perpendiculaire à GC par le point X; porter de même sur GC'', prolongement de C'G, une longueur GY égale à la force qui tend à faire rouler la sphère C' le long du plan incliné correspondant, et par le point Y élever une perpendiculaire à GC'' : ces deux perpendiculaires se rencontreront en un point I. Joindre GI, et prendre sur GI, indéfiniment prolongé, une longueur GK égale à $r+r'$; enfin, par le point K mener KC parallèle à C'GC'', et par le point C, CC' parallèle à KC : les points C et C' seront les centres des sphères dans la position d'équilibre.

Au surplus on peut calculer directement l'angle que la droite des centres CC' doit faire avec l'un des plans inclinés. En effet, désignant par x l'angle C'CG, par exemple, que la droite CC' doit faire avec le plan AB ou avec la droite CG dans la position d'équilibre, on aura, à cause de la relation (3),

$$\frac{p\sin\theta}{p'\sin\theta'}=\frac{\cos[200^\circ-\mathrm{CGC'}-x]}{\cos x}=\frac{\cos[(200^\circ-\mathrm{CGC'})-x]}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos[(200^\circ-\mathrm{BAB'})-x]}{\cos x}=\frac{\cos[(\theta+\theta')-x]}{\cos x};$$

d'où $$\tang x=\frac{p\sin\theta-p'\sin\theta'\cos(\theta+\theta')}{p'\sin\theta'\sin(\theta+\theta')}.$$

Si les deux sphères étaient homogènes entre elles, à cause de $d=d'$ on aurait $\frac{p}{p'}=\frac{r^3}{r'^3}$.

Enfin si les deux plans inclinés étaient perpendiculaires entre eux, on aurait $\theta+\theta'=100^\circ$, $\sin\theta'=\cos\theta$; d'où

$$\text{tang}\, x=\frac{p}{p'}\text{tang}\,\theta.$$

601. 1° On a la formule

$$\cos A=R\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \qquad (F)$$

qui, par une simplification facile, devient

$$\cos A=R\left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}-1\right],$$

ou, en faisant, pour abréger, $a+b+c=2p$,

$$\cos A=R\left[\frac{2p(p-a)}{bc}-1\right]. \qquad (1)$$

2° Remplaçant dans la formule (F) cosA par $2\cos^2\frac{1}{2}A-1$, et réduisant, on trouvera

$$\cos\tfrac{1}{2}A=R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \qquad (2)$$

3° Si dans la même formule (F) on substitue à cosA sa valeur $1-2\sin^2\frac{1}{2}A$, on obtiendra, après réductions convenables,

$$\sin\tfrac{1}{2}A=R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \qquad (3)$$

On pourra donc se servir indifféremment d'une de ces trois formules, dont la dernière toutefois est la plus usitée quand on ne veut déterminer qu'un angle.

Dans le calcul suivant on a déterminé chacun des angles par une des trois formules.

Première formule.

D'après l'énoncé, $2p = 401{,}97$; $p = 200{,}985$; $p - a = 25{,}785$; $p - b = 104{,}635$; $p - c = 70{,}565$.

$$\log 2p = \log 401{,}97 = 2{,}6041936$$
$$\log(p-a) = \log 25{,}785 = 1{,}4113671$$
$$\text{comp}^{t} \log b = \text{comp}^{t} \log 96{,}35 = 8{,}0161483$$
$$\text{comp}^{t} \log c = \text{comp}^{t} \log 130{,}42 = 7{,}8846558$$
$$\log \frac{2p(p-a)}{bc} = \bar{1}{,}9163648$$

$\frac{2p(p-a)}{bc} = 0{,}8248307$, $\therefore \frac{2p(p-a)}{bc} - 1 = -(0{,}1751693)$.

Le cosinus étant négatif, on aura

$$\log \cos(180^\circ - A) = 9{,}2434579$$
$$180^\circ - A = 79^\circ \quad 54' \quad 42''$$
$$A = 100^\circ \quad 5' \quad 18''$$

Deuxième formule.

$$\log p = \log 200{,}985 = 2{,}3031638$$
$$\log(p-b) = \log 104{,}635 = 2{,}0196770$$
$$\text{comp}^{t} \log a = \text{comp}^{t} \log 175{,}20 = 7{,}7564659$$
$$\text{comp}^{t} \log c = \text{comp}^{t} \log 130{,}42 = 7{,}8846558$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}B = 9{,}9819812$$
$$\tfrac{1}{2}B = 16^\circ \quad 23' \quad 28''$$
$$B = 32^\circ \quad 46' \quad 56''$$

Troisième formule.

$$\log(p-a) = \log 25{,}785 = 1{,}4113671$$
$$\log(p-b) = \log 104{,}635 = 2{,}0196770$$
$$\text{comp}^{t} \log a = \text{comp}^{t} \log 175{,}20 = 7{,}7564659$$
$$\text{comp}^{t} \log b = \text{comp}^{t} \log 96{,}35 = 8{,}0161483$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}C = 9{,}6018291$$
$$\tfrac{1}{2}C = 23^\circ \quad 33' \quad 53''$$
$$C = 47^\circ \quad 7' \quad 46''$$

Récapitulant ces trois valeurs, pour en faire la vérification :

A	=	100°	5′	18″
B	=	32	46	56
C	=	47	7	46
A+B+C	=	180°		

4° Comme moyen de vérification on peut encore se servir de la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \qquad (4)$$

qu'on déduit facilement des formules (2) et (3). Cette formule (4) est la plus simple, quand on veut déterminer successivement les trois angles, car elle n'exige que quatre logarithmes et les mêmes pour les trois angles.

Ainsi pour ne vérifier que le résultat du premier calcul, on a

$$\begin{aligned}
\log(p-b) &= \log 104{,}635 = 2{,}0196770\\
\log(p-c) &= \log 70{,}565 = 1{,}8485893\\
\text{comp}^t \log p &= \text{comp}^t \log 200{,}985 = 7{,}6968372\\
\text{comp}^t \log(p-a) &= \text{comp}^t \log 25{,}785 = 8{,}5886329\\
\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A &= 10{,}0768682\\
\tfrac{1}{2}A &= 50^\circ\ 2'\ 39''\\
A &= 100^\circ\ 5'\ 18''
\end{aligned}$$

602. On déterminera directement les angles par la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B).$$

D'après l'énoncé $a+b=332{,}75$; $a-b=126{,}15$.

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) &= \log\operatorname{tang}(58^\circ\ 45'\ 40'') = 10{,}2171337\\
\log(a-b) &= \log 126{,}15 = 2{,}1008873\\
\text{comp}^t \log(a+b) &= \text{comp}^t \log 332{,}75 = 7{,}4778819\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{,}7958029\\
\tfrac{1}{2}(A-B) &= 32^\circ\ 0'\ 2'',9
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}(180°-C) = 58° \quad 45' \quad 40''$$
$$\tfrac{1}{2}(A-B) \qquad = 32 \quad 0 \quad 2,9$$

$$A = 90° \quad 45' \quad 42'',9$$
$$B = 26 \quad 45 \quad 37,1$$
$$C = 62 \quad 28 \quad 40$$

$$A+B+C = 180°$$

Pour déterminer le côté c, on a la formule

$$c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

$$\log a = \log 229,45 = 2,3606881$$
$$\log \sin C = \log \sin 62° \quad 48' \quad 40'' = 9,9478412$$
$$\text{comp}'\log\sin A = \text{comp}'\log\sin 90° \quad 45' \quad 42'',9$$
$$= \text{comp}'\log\sin 89° \quad 14' \quad 17'',1$$
$$= 0,0000384$$

$$\log c = 2,3085677$$
$$c = 203^{m},50$$

On a plusieurs manières de vérifier ce résultat.

1° D'après la formule connue, on a

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\frac{\cos C}{R}} = \sqrt{(a-b)^2+4ab\frac{\sin^2\frac{1}{2}C}{R^2}};$$

d'où $\quad c = \dfrac{a-b}{\cos\varphi}R, \quad \tan\varphi = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}C\sqrt{ab}}{a-b}.$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \sin\tfrac{1}{2}C = \log\sin(31° \quad 14' \quad 20'') = 9,7148388$$
$$\log\sqrt{ab} = 2,1873942$$
$$\text{comp}'\log(a-b) =$$
$$\text{comp}'\log 126,15 = 7,8991127$$

$$\log \tan\varphi = 10,1023757$$
$$\varphi = 51° \quad 40' \quad 29'',2$$

$$\log(a-b) = 2,1008873$$
$$\text{comp}'\log\cos\varphi = 0.2076809$$

$$\log c = 2,3085682$$
$$c = 203,50$$

2° On peut mettre la valeur de c sous la forme suivante :

$$c = \frac{1}{R}\sqrt{(a+b)^2\sin^2\tfrac{1}{2}C + (a-b)^2\cos^2\tfrac{1}{2}C},$$

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{(a+b)}{(a-b)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C.$$

$$\begin{aligned}
\log(a+b) = \log 332,75 &= 2,5221181\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \log\operatorname{tang}(31^\circ\ 14'\ 20'') &= 9,7828663\\
\text{comp}^t\log(a-b) = \text{comp}^t\log 126,15 &= 7,8991127\\
\hline
\log\operatorname{tang}\varphi &= 10,2040971\\
\varphi &= 57^\circ\ 59'\ 35'',7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(a-b) = \log 126,15 &= 2,1008873\\
\log\cos\tfrac{1}{2}C = \log(\cos 31^\circ\ 14'\ 20'') &= 9,9319724\\
\text{comp}^t\log\cos\varphi &= 0,2757084\\
\hline
\log c &= 2,3085681\\
c &= 203^m,50
\end{aligned}$$

605. On se servira des formules,

$$a = \sqrt{\frac{2S\sin A}{\sin B\sin C}}, \quad b = \sqrt{\frac{2S\sin B}{\sin A\sin C}}, \quad c = \sqrt{\frac{2S\sin C}{\sin A\sin B}}.$$

On pourra vérifier les résultats à l'aide des formules

$$abc = 4RS, \quad S = 2R^2\sin A\sin B\sin C,$$

dans lesquelles R désigne le rayon du cercle circonscrit,

et de $$a+b+c = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A\sin B\sin C}\sqrt{2S}.$$

606. On déterminera les angles par la formule

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

608. 1° On a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C},$$

et

$$a = \frac{(b+c)\sin(B+C)}{\sin B + \sin C} = \frac{(b+c)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)};$$

d'où

$$\cos\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b+c}{a}\sin\frac{1}{2}A.$$

2° On obtiendrait par une transformation semblable

$$\sin\frac{1}{2}(B-C) = \frac{(b-c)}{a}\cos\frac{1}{2}A.$$

609. De $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

on tire

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{bc}{\sin B \sin C} = \frac{bc}{\frac{1}{2}\cos(B-C) - \frac{1}{2}\cos(B+C)};$$

d'où $\cos(B-C) = \frac{2bc\sin^2 A - a^2\cos A}{a^2}$,

formule que l'on calculera à l'aide d'un angle auxiliaire.

610. On aura, pour déterminer les côtés, les formules

$$a = \frac{2p\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

$$b = \frac{2p\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}, \quad c = \frac{2p\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

On pourra rendre ces formules applicables au calcul logarithmique à l'aide des transformations suivantes :

$$a = \frac{2p}{1 + \left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin(B+C)}\right)} = \frac{2p}{1 + \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}},$$

et, faisant $\tan g^2\varphi = R^2 \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}$

on aura $a = \frac{2p\cos^2\varphi}{R^2}$.

QUESTIONS DIVERSES.

---

611. Etant donné l'équation

$$x^3 - ax^2 + 10x - 4 = o,$$

déterminer a par la condition que l'équation admette une racine moyenne arithmétique entre les deux autres.

612. Trouver les points d'inflexion de la courbe

$$y = x^3 - x^5.$$

613. Etant donné une équation

$$f(x) = 0,$$

faire voir, par la géométrie, que, un peu avant la racine, la fonction en x et sa dérivée sont de signes contraires, et que, un peu aprés, elles sont de même signe.

614. Déterminer le rapport entre les coefficients de l'équation

$$yx = ax + by$$

pour que cette courbe soit concentrique avec $y = x^3$.

615. Trouver les conditions pour que les courbes

$$y^2 = 4x + 6y \quad \text{et} \quad xy = ax + by + c$$

aient un sommet commun.

616. Par un des foyers de l'ellipse on mène deux cordes parallèles à un systéme de diamètres conjugués quelconques : déterminer la somme de ces deux cordes.

617. Trouver les conditions pour que les courbes

$$xy = ax + by \quad \text{et} \quad y^2 + 2cxy + c^2x^2 = 4x$$

aient un foyer commun.

618. Déterminer les conditions pour que les courbes

$$y^2 + 2cxy + c^2x^2 = by \quad \text{et} \quad xy = ax + b$$

aient un sommet commun.

619. Circonscrire à un triangle équilatéral une parabole dont le sommet soit à l'un des sommets du triangle.

620. Déterminer a, b, c, par la condition que

$$y^2 = ax + by \quad \text{et} \quad xy = bx + c$$

aient un même foyer, une même directrice et une tangente commune.

621. Déterminer le lieu géométrique des centres des circonférences qui coupent deux circonférences concentriques données chacune sous un angle donné.

622. Déterminer les conditions pour que les courbes

$$xy = ax + by + c \quad \text{et} \quad y^2 = 4x - 9x^2$$

soient concentriques.

623. Dans toute ellipse, si, après avoir construit sur deux diamètres conjugués quelconques le parallélogramme circonscrit à la courbe, on mène les diagonales de ce parallélogramme, toute corde parallèle à un des diamètres est divisée par la diagonale en deux segments tels que la somme de leurs carrés est constante et égale au double du carré du demi-diamètre parallèle.

624. Déterminer les conditions pour que la courbe

$$y^2+axy+bx^2+cx=0$$

ait pour asymptote $y=x+1$.

Quel est le lieu des sommets de ces hyperboles?

625. Inscrire dans une parabole donnée un triangle équilatéral dont un des côtés passe par le foyer.

626. Quelle est la condition pour que les courbes

$$y^2+ax^2+b^2=0 \quad \text{et} \quad y=x^2$$

soient tangentes ?

Trouver le lieu des intersections des directrices et des asymptotes de toutes les hyperboles représentées par la première équation, et tangentes à la parabole représentée par la seconde.

Déterminer l'asymptote de cette courbe.

627. Quelle est la condition pour que les racines de l'équation

$$x^3+px+q=0$$

soient en progression géométrique?

628. Déterminer a et b par la condition que chacune des courbes

$$xy=1 \quad \text{et} \quad y^2=ax+b$$

ait un sommet sur la directrice de l'autre.

629. Etant donné l'équation

$$x^4-x^2-2x+p=0,$$

déterminer p par la condition que le produit de deux de ses racines soit égal à 1.

630. Résoudre l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0,$$

sachant qu'elle a une racine double et moyenne arithmétique entre les deux autres.

631. Déterminer la condition de tangence d'une parabole et d'un cercle.

632. Décrire un cercle passant par un point donné et coupant deux parallèles données chacune sous un angle donné.

633. Discuter et construire la courbe

$$y = 3x^2 \pm \sqrt{\frac{x^3 - 2x - 15}{x^2 - 4}}.$$

634. Par un point donné mener à une courbe donnée du 2e degré une sécante telle que la partie comprise soit d'une longueur donnée.

635. Trouver le lieu géométrique des centres des cercles tangents à la parabole et à la droite perpendiculaire à l'axe au sommet de la courbe.

636. Inscrire dans un parallélogramme donné une ellipse équivalente à un cercle donné.

637. Discuter et construire la courbe

$$\rho = \frac{1 + \sin^3\omega + 2\sin 3\omega}{3\cos^2\omega - \cos 2\omega}.$$

638. Circonscrire une parabole à un quadrilatère donné.

639. Construire les racines de l'équation

$$x^4+px^2+qx+r=o$$

par l'intersection d'une parabole et d'un cercle.

640. Pendant que l'extrémité du rayon vecteur mené par un des foyers de l'ellipse décrit la courbe, un point se meut sur le rayon vecteur de manière que ses distances au foyer soient proportionnelles aux angles que le rayon vecteur fait avec l'axe de l'ellipse : quel est le lieu géométrique du point mobile.

641. Déterminer par le calcul, en fonction des diagonales d'un parallélipipède-rhomboïde, les angles plans et les angles dièdres du solide.

642. Circonscrire à une ellipse donnée un triangle équilatéral dont un des côtés soit perpendiculaire au grand axe.

643. Trouver le lieu géométrique des centres de gravité de tous les triangles construits sur une même base donnée, et dont les sommets sont assujettis à rester constamment sur la circonférence d'un cercle donné.

644. Calculer le nombre d'années nécessaires pour amortir un capital a, au moyen d'une annuité p, destinée 1° à payer annuellement l'intérêt du capital ; 2° à opérer l'extinction du même capital moyennant rachat sur le pied de m p. 0/0.

Le taux de l'intérêt de 1 fr. par an étant représenté par r.

645. D'un point fixe P, pris dans le plan de deux droites données, on mène des transversales, en nombre quelconque, qui coupent les droites, chacune en des points A et B : quel est le lieu géométrique des points M pris sur chaque transversale de manière que $\frac{MA}{MB}$ soit constamment égal à un rapport donné?

646. Discuter et construire la courbe

$$2x^2y - x^3y^2 + 3x^2 - 1 = 0.$$

647. Etant donné les équations de deux droites, trouver le lieu géométrique des points tels que leurs ordonnées soient moyennes proportionnelles entre les ordonnées des droites données.

648. Aux deux extremités d'une droite donnée on élève deux perpendiculaires indéfinies, sur lesquelles on prend des longueurs telles que le trapèze-rectangle résultant soit équivalent au carré construit sur la droite donnée : quel est le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales de tous les trapèzes équivalents?

649. Inscrire dans une ellipse donnée quatre cercles tangents entre eux et à l'ellipse.

650. Etant donné trois points A, B, C, sur les distances AB, AC, comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, dans chacune desquelles on inscrit une corde AM, AN, telles que le rapport $\frac{AM}{AN}$ soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$; ensuite on joint BM et CN; quel est lieu géométrique des points de rencontre I de ces dernières droites?

FIN.



Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 8.

Fig. 10.

Fig. 12.

Fig. 15.

Fig. 17.

Gravé par Duran

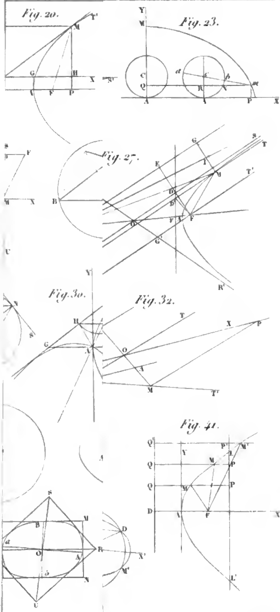
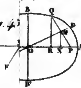
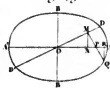
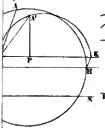

Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 27.
Fig. 30.
Fig. 32.
Fig. 41.

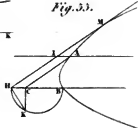
Planche III.

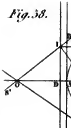


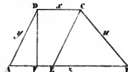


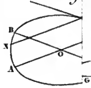


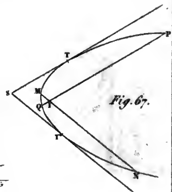








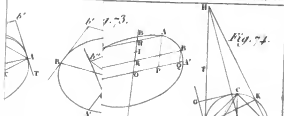


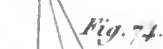


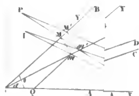
Gravé par Duran

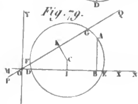

NAPOLI

Planche IV.

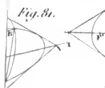


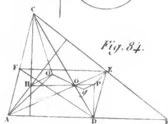


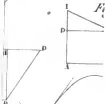


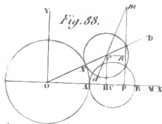


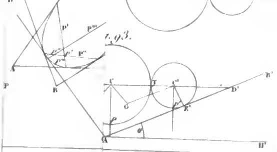












Gravé par Durau


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI





